



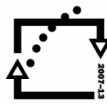
evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt CZ.1.07/2.2.00/15.0383
Inovace studijního oboru Dopravní a manipulační technika
s ohledem na potřeby trhu práce

Mechanika vozidel

Část 2

Učební text k předmětu
KME/MV Mechanika vozidel

doc.Ing.Jaromír Švígler, CSc.

2013

2 VALENÍ PNEUMATIKY NA TUHÉM PODKLADU

V předcházející kapitole jsme se zabývali elementárními pojmy, které se z hlediska mechaniky týkaly pohybu pneumatik po tuhém podkladu a které jsou nezbytné pro pochopení dějů, které při pohybu pneumatiky nastávají. Jak bylo již řečeno, tyto děje mají přímý a velmi bezprostřední vliv na jízdní vlastnosti automobilu. Nezmiňovali jsme odchylky, které vzniknou při valení pneumatiky po poddajném podkladu a z úvah jsme rovněž vyloučili síly, které nepůsobily v čelní rovině kola. Nyní se k této problematice ještě vrátíme a rozšíříme náš pohled na valení pneumatiky po tuhém podkladu. Budeme rozlišovat dva případy. Valení pneumatiky bez bočních sil a valení s působením bočních sil.

2.1 Valení bez působení boční síly

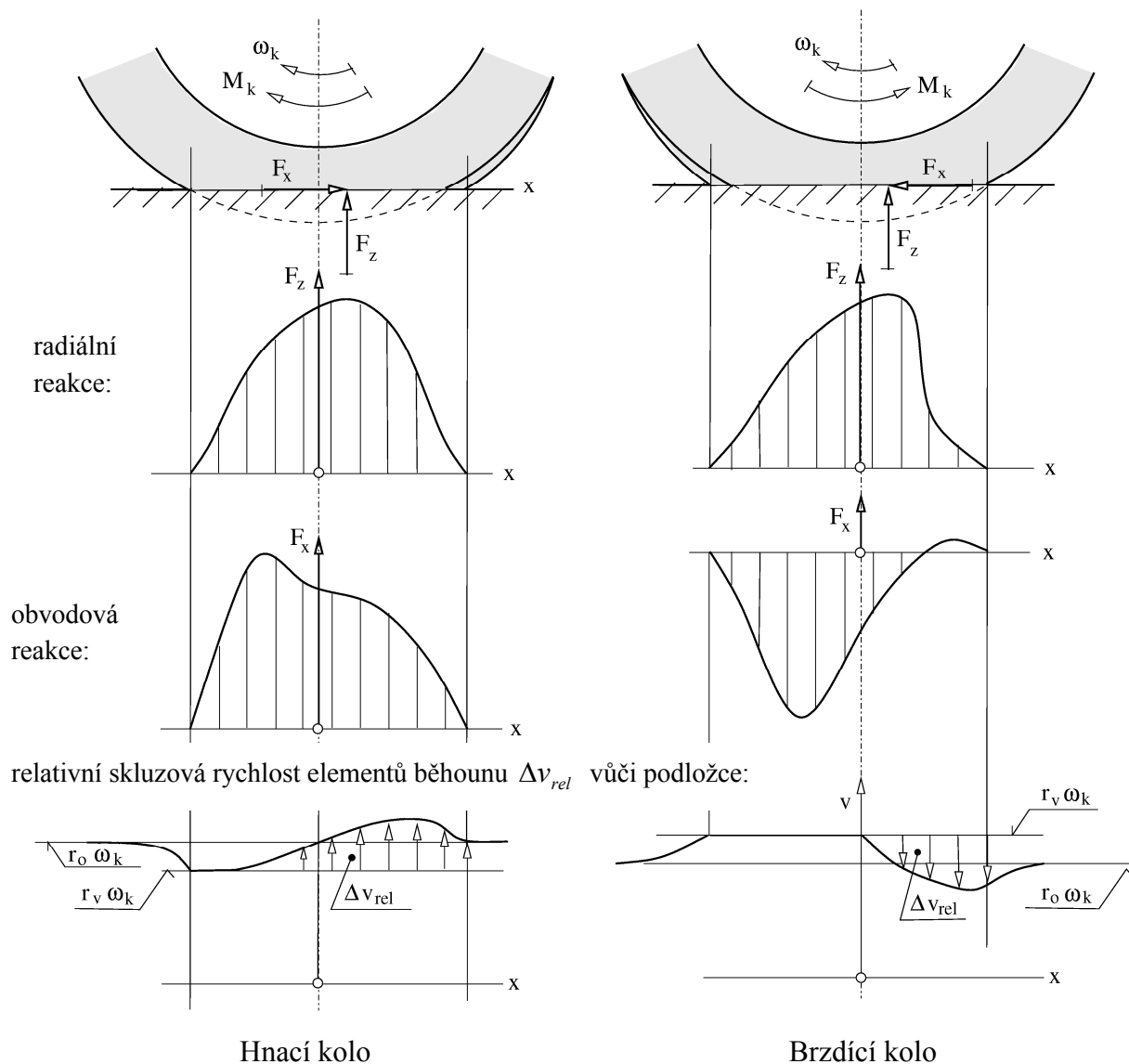
V kapitole 1. 3 jsme jednak ukázali silové poměry na kole, které se rovnoměrně valí a dále jsme ukázali závislost tečných sil přenášených z kola na vozovku, případně obráceně, na radiálním zatížení kola reprezentované radiální silou F_z . Rovněž jsme se zmínili, že dotyk pneumatiky s podložkou není v bodě, nýbrž v jisté dotykové plošce, ve které dochází ke vzniku jak sil *soudržných*, nebo také *adhezních*, tak i sil *třecích*. Důsledkem je vznik skluzu kola, který jsme vyjadřovali pomocí skluzových charakteristik, obr. 15 a zavedli jsme dva důležité pojmy: součinitel adheze a součinitel tření. Nyní se budeme tomuto jevu věnovat trochu podrobněji.

2.1.1 Silové poměry v dotykové plošce

Rozdělení obvodových a normálových sil v dotykové plošce běhounu pneumatiky s tuhou rovnou podložkou a průběh skluzové rychlosti v této plošce, můžeme znázornit [1] tak, jak je ukázáno na obr. 18. Z obrázku je patrné, že výsledné radiální síly F_z a obvodové síly F_x jsou složeny z elementárních sil působících v jednotlivých elementech pryžového běhounu, přičemž tyto elementy se vzhledem k podložce nacházejí v klidu, nebo jsou v relativním pohybu. Soudržnost pneumatiky s vozovkou nastává v dotykové plošce současně pro případ nulové i nenulové relativní rychlosti.

2.1.2 Soudržnost pneumatiky s vozovkou

Z předcházející kapitoly vyplývá, že při valení pneumatiky existuje v dotykové plošce jistá oblast kontaktu [1], ve kterém je relativní rychlost mezi pryžovými elementy běhounu a tuhou podložkou nulová a pak hovoříme o **stacionární soudržnosti** a současně je v dotykové plošce další kontaktní oblast, kde je relativní rychlost mezi elementy a podložkou nenulová, dochází zde ke skluzu a jedná se o **třecí soudržnost**. Ke ztrátě soudržnosti pneumatik s podložkou dojde v okamžiku, kdy v celé dotykové plošce existuje pouze třecí soudržnost, tedy v celé plošce není žádný element, který by se vzhledem k podložce nepohyboval. Existence obou těchto oblastí je pro valení pneumatiky a tím i pro přenos tečných sil mezi pneumatikou a podložkou typická a hovoříme o **silách stacionárních** a o **silách třecích**.

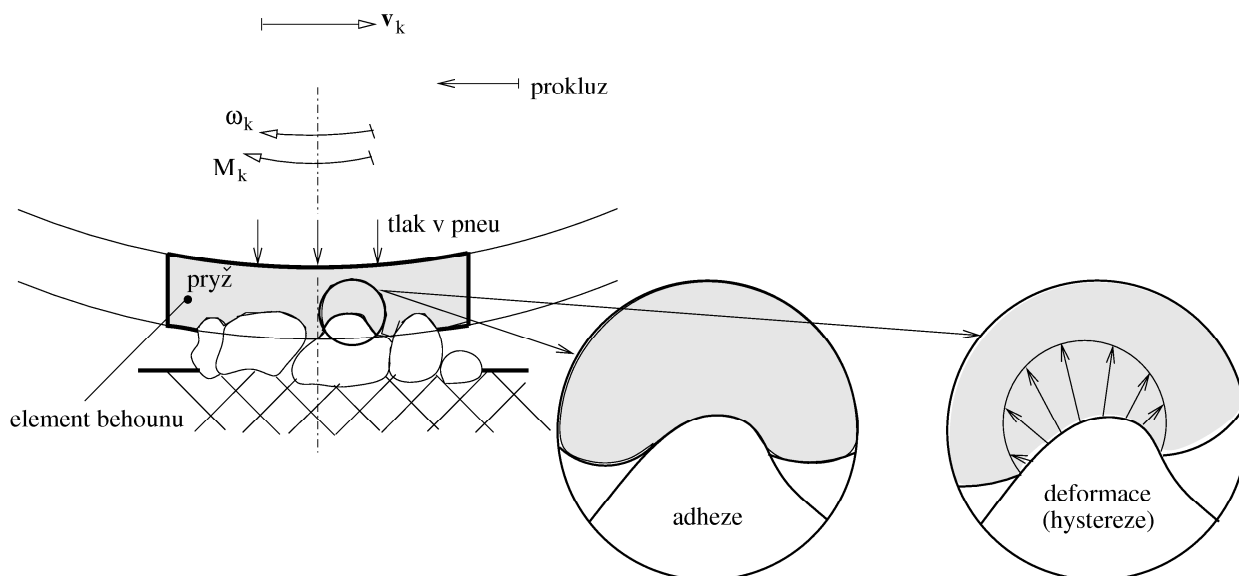


Obr. 18 Rozložení tečných a radiálních sil v dotykové plošce

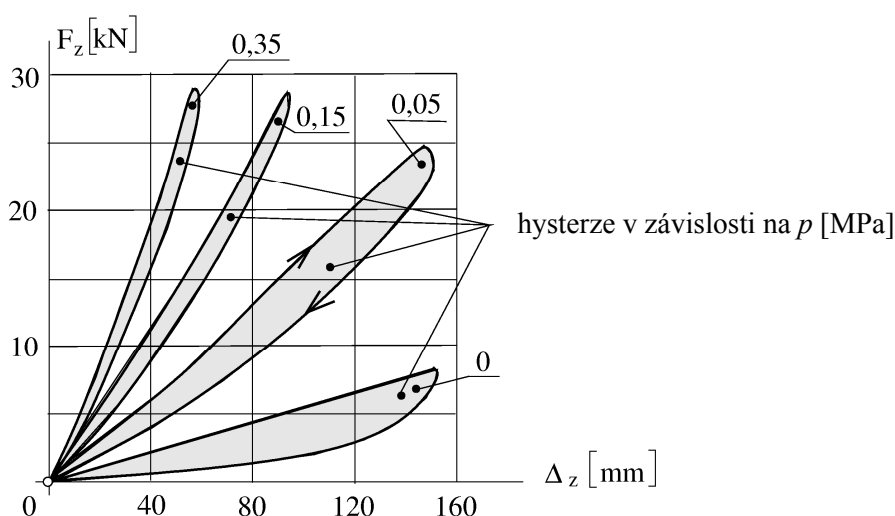
Vznik soudržnosti v dotykové plošce mezi pneumatikou a podložkou je principiálně ukázán na obr. 19, který znázorňuje kontakt elementární plošky dezénu pneumatiky s podložkou. Působením obvodové síly F_x dochází k deformaci pneumatiky v tečném směru. Vlivem statické radiální síly F_z vznikne radiální reakce F_z , která způsobí deformaci Δz . Závislost $F_z(\Delta z)$, která se nazývá *radiální deformační charakteristikou*, je nelineární a má tvar [1] hysterezní smyčky znázorněné na obr. 20 pro různé tlaky nahuštění pneumatiky. Plocha hysterezní smyčky představuje ztrátovou disipativní energii způsobenou přeměnou mechanické energie na teplo. Hysterezní ztráty jsou závislé na vlastnostech pryže a na smykových deformacích. Radiální deformace pneumatiky je závislá nejenom na statickém zatěžování silou F_z , nýbrž i na zatěžování dynamickou silou vznikající při pohybu kola. Potom je radiální síla působící mezi podložkou a pneumatikou, obr. 3, dána vztahem

$$F_z = k_z \Delta z + b_z \Delta \dot{z}, \quad (14)$$

kde k_z je konstanta radiální tuhosti pneumatiky a b_z je konstanta tlumení. Do frekvencí budících sil $\omega = 20 \div 25 \text{ Hz}$, se plášť pneumatiky chová jako nehmotné těleso. Hluběji tyto záležitosti nyní studovat nebudeme. Rovněž se nebudeme zabývat neustálenými stavy valení pneumatiky, které mohou být u hnací pneumatiky vyvolány torzními kmity v pohonném systému kola, nebo při brzdění působením antiblokovacího zařízení.



Obr. 19 Vznik soudržnosti u elementu běhounu pneumatiky



Obr. 20 Deformační charakteristiky pneumatiky

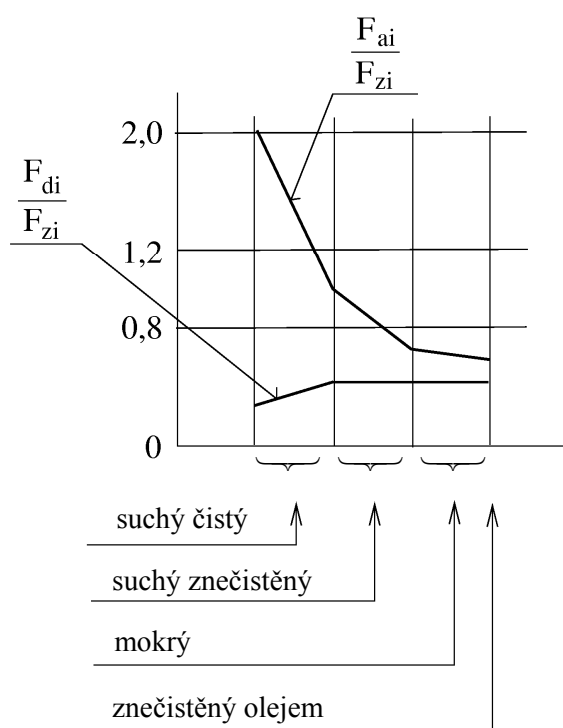
Stacionární soudržnost je způsobena:

- deformací elementů pryže běhounu pneumatiky, kdy nerovnosti podložky vnikají do pryže a působí jako zuby. Označme elementární sílu příslušnou této složce F_{di}^S , kde S znamená stacionární, d označuje deformaci pryže, při které dochází k hysterezi způsobené jejími viskoelastickými vlastnostmi a i označuje element běhounu.

- adhezi, kdy dochází ke vzniku molekulárních sil mezi pryží běhounu a povrchem podložky. Tyto síly mohou vzniknout pouze za předpokladu, že povrchy elementu běhounu a podložky jsou čisté a že se molekuly obou povrchů dostanou do dosahu molekulárních sil. K tomu je nutný dostatečně velký místní měrný tlak, přibližně 3-7 MPa. Elementární sílu příslušnou této složce označíme F_{ai}^S , kde a označuje adhezi.

Třecí soudržnost je způsobena:

- deformací elementů pryže běhounu pneumatik vnikáním mikronerovností podložky do pryže, podobě jako u stacionární soudržnosti, ale v tomto případě se tak děje za pohybu, kdy se elementy deformují při relativním pohybu vůči podložce. Elementární síla příslušná této složce je F_{di}^T , kde T znamená třecí sílu. V tomto případě stoupá význam hysterezní třecí složky, kde práce potřebná k deformaci pneumatiky je větší než práce získaná jejím roztahením.
- adhezi, kdy i za relativního pohybu elementů pryže vůči podkladu, dochází ke vzniku molekulárních sil podobně jako u stacionární soudržnosti. Vzniklá elementární síla je F_{ai}^T . Podmínkou jejího vzniku je, že vzdálenost obou ploch je menší než 10^{-6} mm, takže kontaktní plochy musí být hladké a čisté.
- abrazí, kdy dochází k vytrhávání částic pryže z běhounu. Tato složka vyvolá elementární sílu F_{ri}^T , která způsobuje opotřebování běhounu pneumatiky.



Obr. 21 Vliv stavu povrchu podložky na elementární síly soudržnosti

Celková elementární tečná síla soudržnosti je dána součtem jednotlivých elementárních sil

$$F_{ti} = F_{di} + F_{ai} + F_{ri}, \quad (15)$$

kde $F_{di} = F_{di}^S + F_{di}^T$, $F_{ai} = F_{ai}^S + F_{ai}^T$, $F_{ri} = F_{ri}^T$ jsou jednotlivé elementární síly příslušející statické (S) a třecí (T), soudržnosti. Z hlediska snížení opotřebení dezénu pneumatiky je žádoucí, aby elementární síla F_{ri} způsobující abrazi byla co nejmenší a aby hlavními částmi celkové elementární síly byly síly F_{di} a F_{ai} . Závislost těchto elementárních sil na stavu povrchu vozovky [1] je ukázána na obr. 21, ze kterého je patrné, že u suchého, čistého povrchu je elementární adhezí síla F_{ai} podstatně větší než síla vzniklá deformací, případně hysterezi, elementu běhounu. Při klesající teplotě stoupá tvrdost pryže, pryž křehne a hysterezní složka soudržnosti se snižuje. Významnou vlastností zimních pneumatik je, že jejich pryž běhounu si zachovává velkou hysterezi i při teplotách pod bodem mrazu.

2.1.2.1 Součinitelé soudržnosti

Při přenosu sil z pneumatiky na podložku dochází vždy k deformaci pneumatiky a tím ke vzniku místních deformací elementů běhounu. Pokud při deformaci nedojde ke smyku, tedy pokud elementární tečná síla nepřekročí elementární stacionární sílu soudržnosti, je element běhounu vůči podložce v klidu. Pokud dojde k překročení této meze, dojde k relativnímu pohybu mezi elementem a podložkou. Tyto stavy vyjadřujeme pomocí elementárních součinitelů soudržnosti.

Elementární součinitelé soudržnosti

Součinitel soudržnosti elementu budeme definovat podobným postupem, který jsme použili v rov. (7), tj. poměrem maximální tečné elementární síly soudržnosti k elementární normálové síle. Budeme hovořit o stacionárním, nebo o třecím, elementárním součiniteli soudržnosti.

Stacionární elementární součinitel soudržnosti

Tento součinitel je definován vztahem

$$\mu_{xi} = \frac{F_{ti \max}}{F_{zi}} \wedge v_{rel} = 0, \quad (16)$$

kde $F_{ti \max}$ pro $v_{rel} = 0$ je maximální hodnota celkové tečné elementární síly soudržnosti z rov. (15) při které ještě nedojde k relativnímu pohybu, mezi elementem pneumatiky a vozovkou a F_{zi} je normálová síla působící na element. Pokud platí, že

$$F_{ti} \leq \mu_{xi} F_{zi}, \quad (17)$$

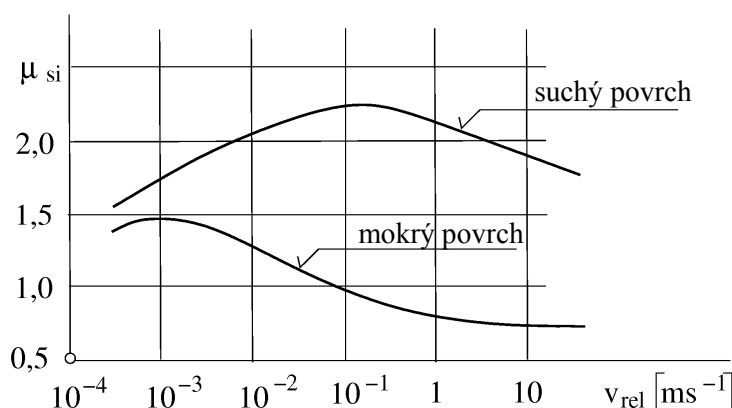
dochází ke stacionární elementární soudržnosti.

Třecí elementární součinitel soudržnosti

V případě, že tečná elementární síla F_{ti} překročí podmínku stacionární elementární soudržnosti určenou rov. (17), dojde k relativnímu pohybu mezi elementem běhounu a podložkou. Stacionární elementární součinitel soudržnosti μ_{xi} se změní na třecí elementární součinitel soudržnosti μ_{si} pro který platí vztah

$$\mu_{si} = \frac{F_{ti \max}}{F_{zi}} \wedge v_{rel} \neq 0. \quad (18)$$

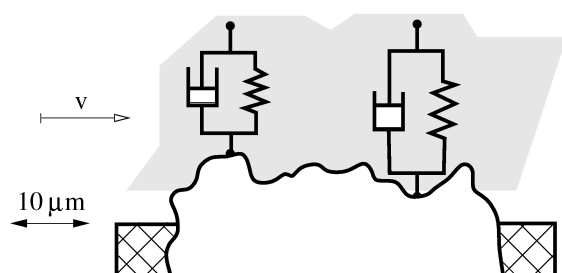
Součinitel elementární třecí soudržnosti μ_{si} je silně závislý na velikosti relativní rychlosti skluzu elementu běhounu vzhledem k podložce, neboť při stoupající rychlosti se hysterezní složka deformace elementu zvyšuje, ale současně dochází ke snižování adhezní složky elementární síly. Závislost elementárního součinitele třecí soudržnosti na relativní rychlosti mezi elementem běhounu a podložkou je ukázána na obr. 22.



Obr. 22 Závislost třecího elementárního součinitele soudržnosti μ_{si} na relativní rychlosti

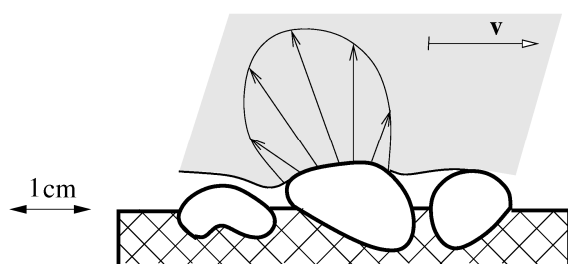
Mechanické pochody, o kterých jsme hovořili a které se odehrávají v elementu běhounu pneumatiky, jsou pro představu schematicky znázorněny pro jízdní režim brzdění na obr. 23, kde jsou uvedeny délky oblastí, na kterých k těmto jevům dochází. Všimněte si různých měřítek délek.

Hysterezní tření:

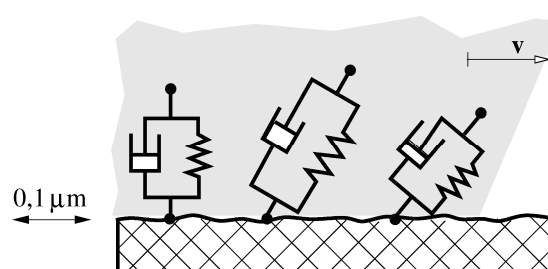


Částice běhounu prochází při svém průchodu dotykovou plochou pneumatiky s podložkou oběma stavy soudržnosti. Za běžných podmínek valení dosahují rychlosti smýkání elementů běhounu při třecí soudržnosti, ale bez prokluzu celé pneumatiky, řádově 10^{-2} ms^{-1} . Při prokluzu celé pneumatiky dosahují rychlosti vozidla, řádově 10^1 ms^{-1} .

Deformace, zubový efekt:



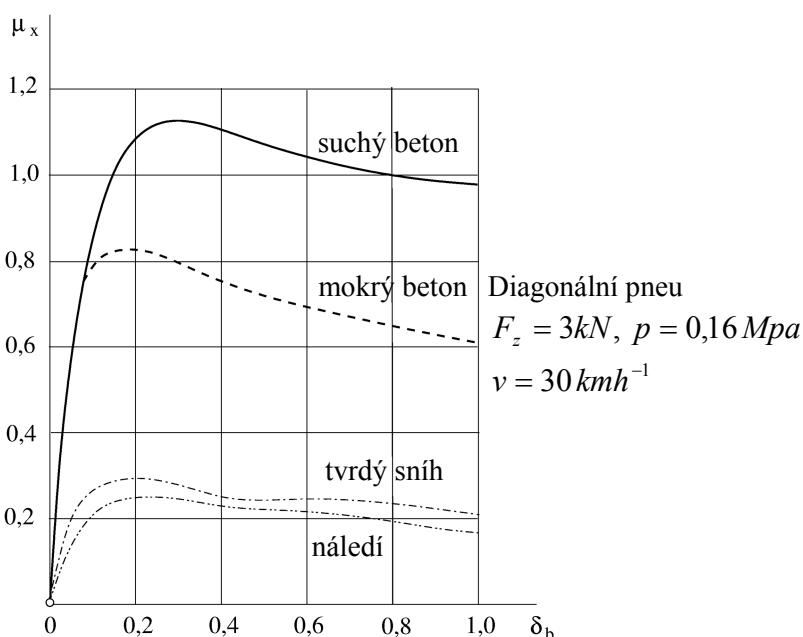
Adheze:



Obr. 23 Mechanické jevy v elementu běhounu při přenosu síly v režimu brzdění při třecí soudržnosti

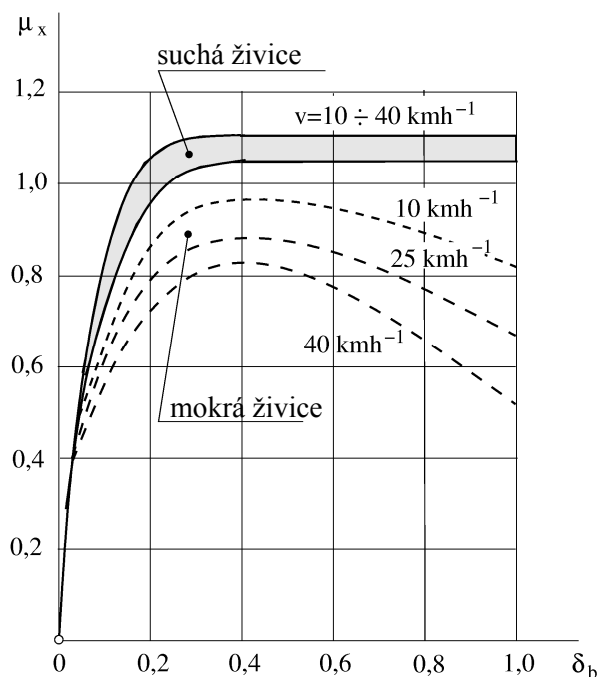
Součinitelé soudržnosti dotykové plochy

Elementární součinitelé soudržnosti μ_{xi} , μ_{si} jsou odlišní od součinitelů soudržnosti μ_x , μ_s uvedených dříve, které se vztahovaly k celkovým tečným a normálovým silám působícím na pneumatiku v dotykové ploše a o kterých jsme se již zmínili v kapitole 1.3 v souvislosti se skluzovými charakteristikami. Ze skluzových charakteristik uvedených na obr. 15 má z hlediska bezpečnosti jízdy větší význam skluzová charakteristika pro brzdící kolo. Ukážeme nyní [6] jaký vliv na tvar této charakteristiky má materiál povrchu vozovky, rychlost pohybu kola a radiální zatížení pneumatiky. Závislosti jsou uvedené na obr. 24, 25 a 26.



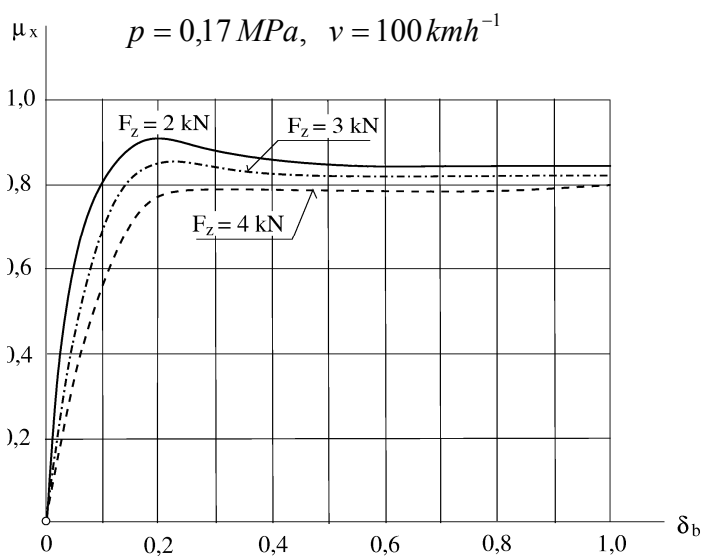
Obr. 24 Vliv materiálu podkladu na skluzovou charakteristiku

V prvních dvou případech byla použita diagonální pneumatika Dunlop 5,90 – 15 zatížená radiální silou 3 kN a nahuštěná na tlak $p = 0,16 \text{ MPa}$. Na třetím obrázku je případ pneumatiky 6,00 – 15 nahuštěné na tlak $0,17 \text{ MPa}$, která se valí na ocelovém válci rychlostí 100 kmh^{-1} .



Diagonální pneu $F_z = 3 \text{ kN}$, $p = 0,16 \text{ MPa}$

Obr. 25 Vliv rychlosti na skluzovou charakteristiku



Pneu 6,00 – 15 na ocelovém válci,

Obr. 26 Vliv radiálního zatížení na skluzovou charakteristiku

Na konci kapitoly 1.3, obr. 15, jsme se zmínili o velkém významu dvou bodů skluzové charakteristiky brzděného kola, jejichž hodnoty jsme označili μ_v a μ_s . Budeme se nyní těmto hodnotám věnovat podrobněji:

μ_v je maximální hodnota součinitele soudržnosti valení μ_x , kterou v běžném životě označujeme φ a nazýváme ho součinitelem adheze

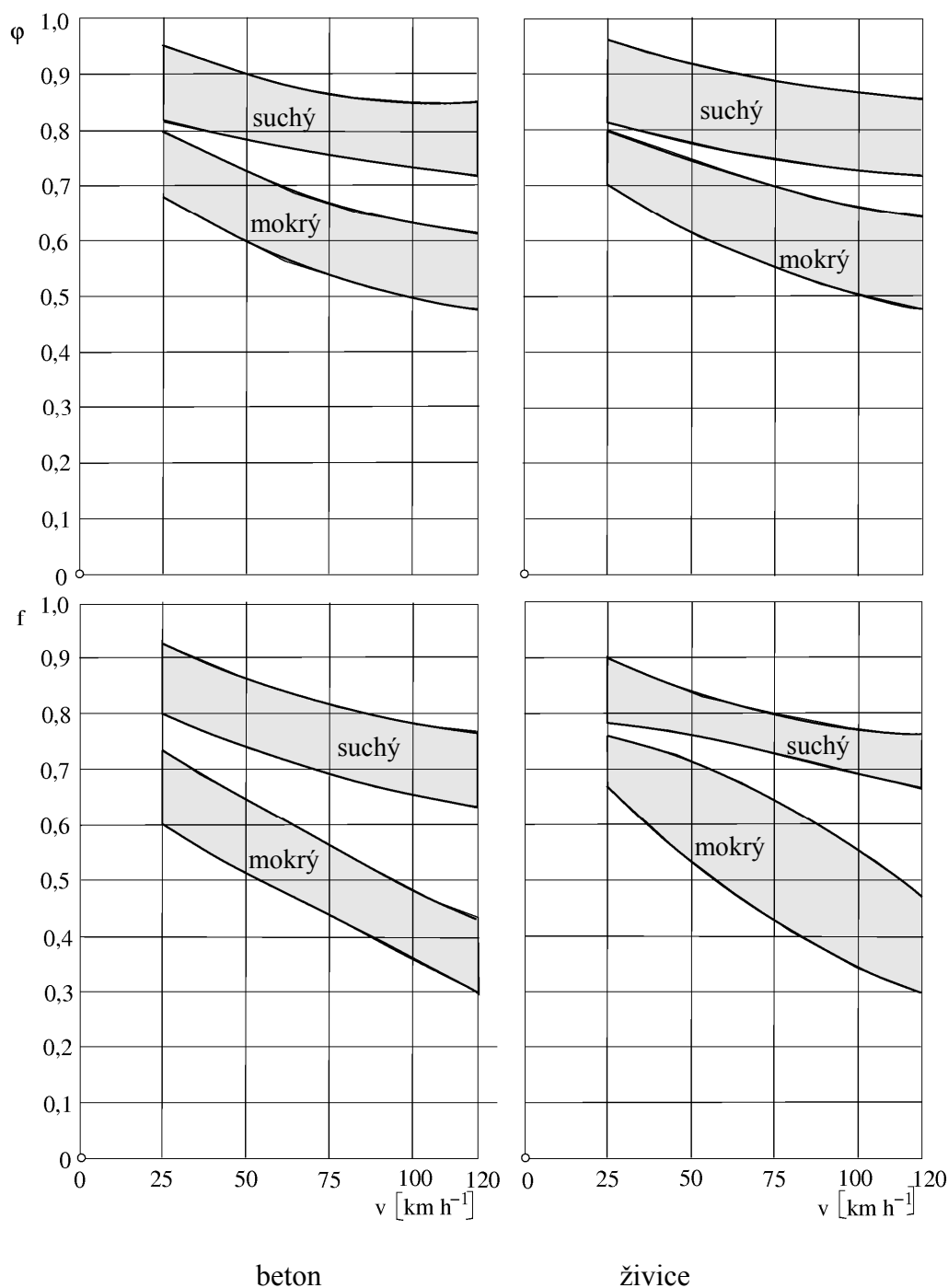
$$\varphi \equiv \mu_v = \max \mu_x. \quad (19)$$

Tato hodnota určuje maximální tečnou brzdící sílu, kterou je brzdící rotující kolo schopné přenést na vozovku

μ_s je součinitel soudržnosti skluzu, který opět v běžném životě označujeme f a nazýváme ho součinitelem tření

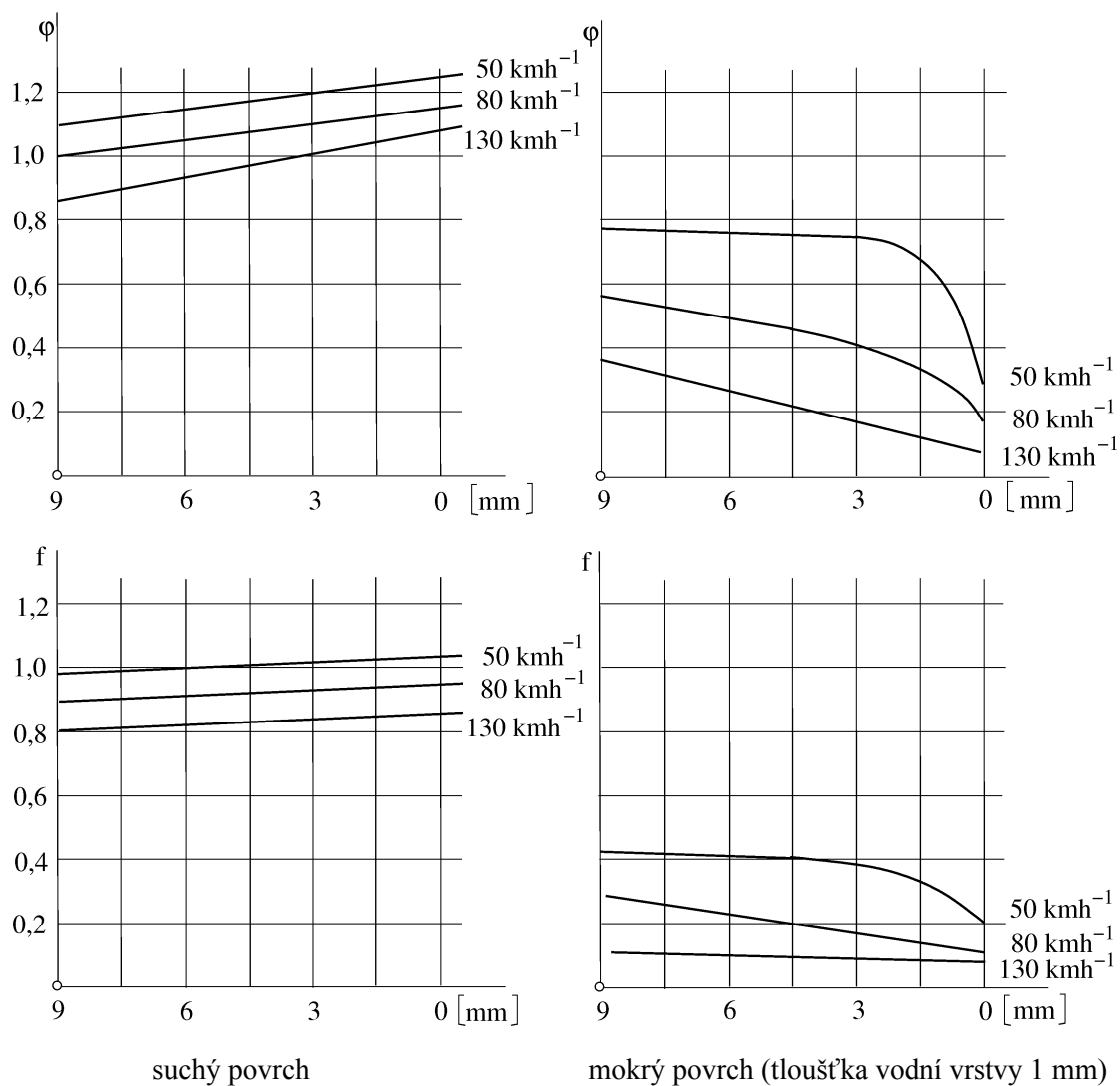
$$f \equiv \mu_s. \quad (20)$$

Tato veličina určuje maximální tečnou brzdící sílu, kterou je brzdící nerotující kolo schopno přenést na vozovku při čistém smyku nebo prokluzu. Platí důležitý vztah mezi oběma veličinami, kdy $f < \varphi$. Ukážeme, na čem významně závisí hodnoty součinitelů adheze φ a podélného tření f . Protože vyšších hodnot koeficientů se dosahuje při brzdění a protože režim brzdění je rovněž důležitější z hlediska bezpečnosti provozu, uvádějí se hodnoty koeficientů φ a f pro brzdící kolo. Jejich závislost na rychlosti a na povrchu vozovky je uvedena [6] na obr. 27.

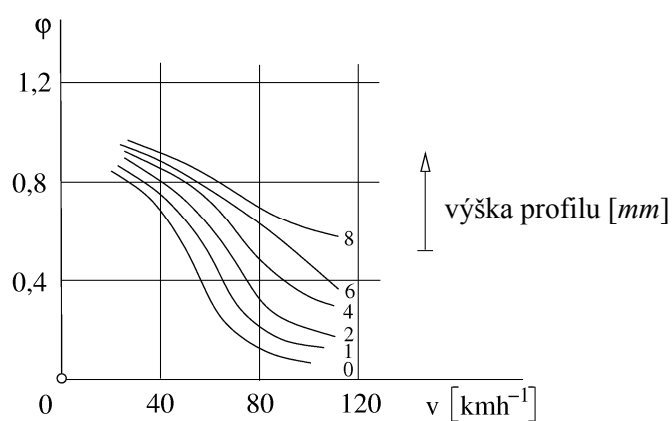


Obr. 27 Závislosti koeficientů adheze a tření na povrchu vozovky a rychlosti

Vliv výšky profilu dezénu pneumatiky pro mírně ojetý živичný povrch střední zrnitosti [1] u diagonální pneumatiky zatížené radiální silou $F_z = 2,5 \text{ kN}$ a pro tlak nahuštění $p = 0,18 \text{ MPa}$ je ukázán na obr. 28, kde tloušťka vodní vrstvy na živичném povrchu je 1 mm . Závislost součinitele adheze na rychlosti jízdy a na výšce profilu při jízdě na mokřém živичném povrchu s tloušťkou vodní vrstvy $2 \div 3 \text{ mm}$ je ukázána na obr. 29. K podstatné změně součinitele adheze dochází na začátku deště, kdy se suchý povrch vozovky mění na mokřý. Tato závislost je zachycena na obr. 30 pro mírný dešť.

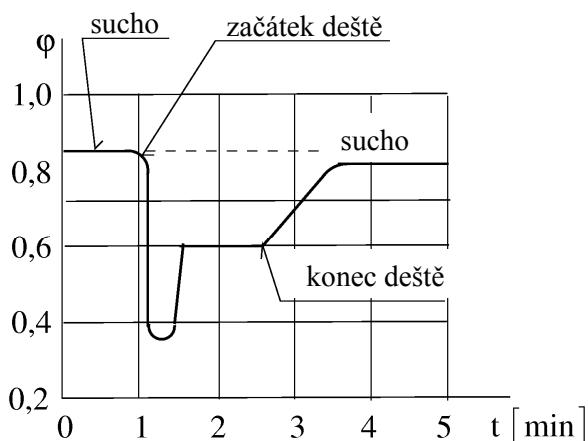


Obr. 28 Vliv výšky profilu deženu na součinitele adheze a tření

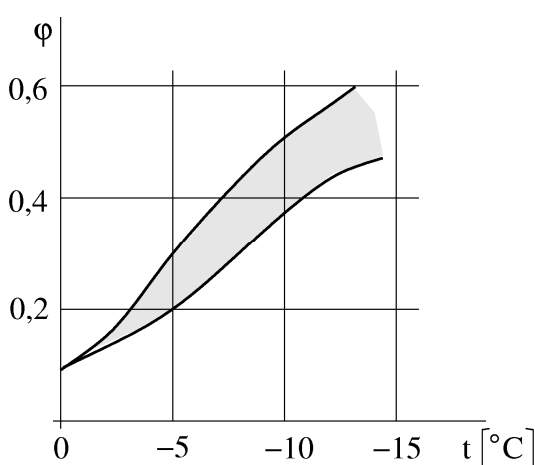


Obr. 29 Závislost součinitele adheze na rychlosti jízdy a na výšce profilu při tloušťce vodního filmu 2 ÷ 3 mm .

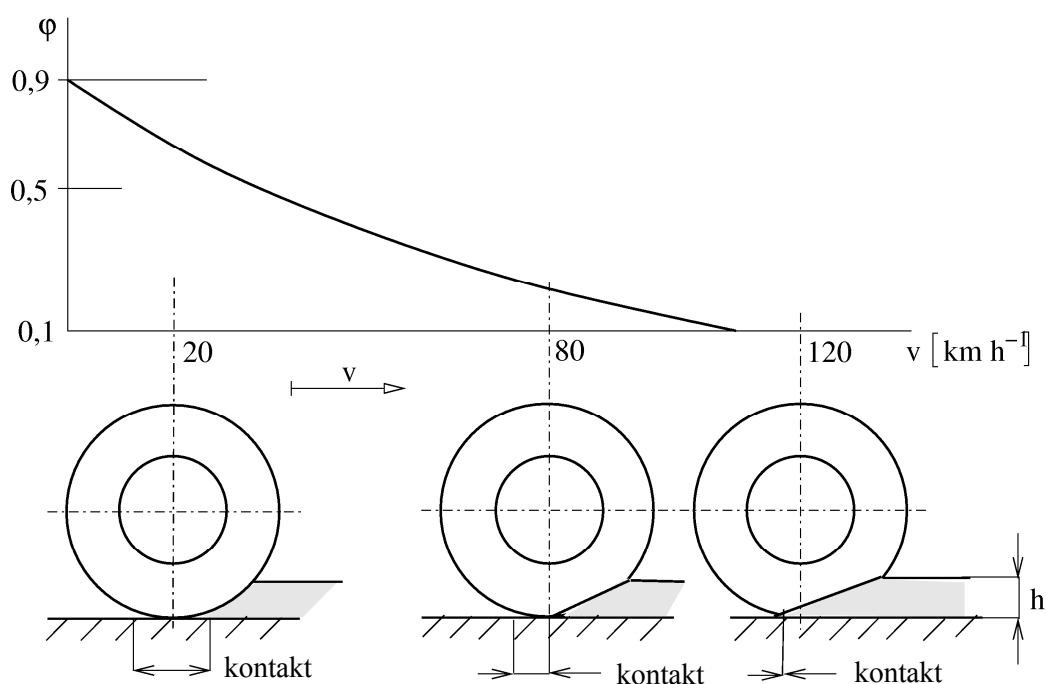
Rovněž při pohybu na ledu je součinitel adheze významně závislý na jeho teplotě, jak je patrné z obr. 31. Uvedené závislosti nejsou zdaleka jediné, ale můžeme je zařadit mezi nejvýznamnější. Na součinitel adheze mají vliv i další okolnosti, jako je teplota pneumatiky a podkladu, kdy soudržnost pneumatiky se vzrůstající teplotou klesá, makro a mikronerovnosti vozovky, které souvisí s nerovnoměrným opotřebením povrchu vozovky, materiál povrchu vozovky a pod. Připomeneme ještě vznik aquaplaningu, ke kterému dochází při kombinaci rychlosti jízdy, výšky profilu dezénu pneumatiky a tloušťky vodní vrstvy. Schematické znázornění tohoto nežádoucího a nebezpečného jevu je na obr. 32. Při dosažení plného aquaplaningu, kdy vymizí kontakt mezi pneumatikou a podložkou je vozidlo neovladatelné. Hranice neovladatelnosti jsou určeny mezními křivkami aquaplaningu, které jsou přibližně ukázány na obr. 33.



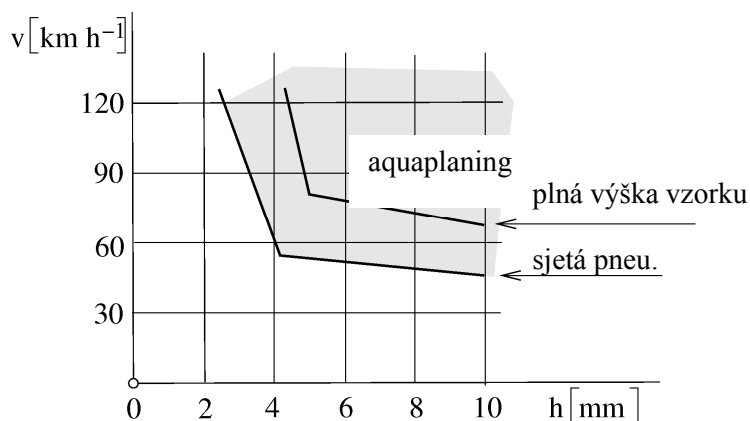
Obr. 30 Časový průběh součinitele adheze na počátku deště



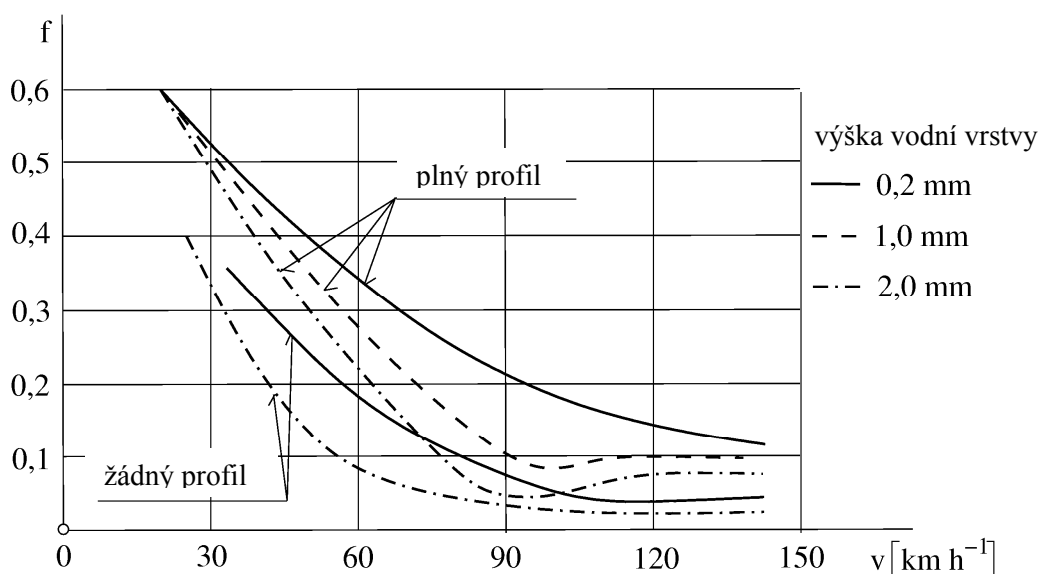
Obr. 31 Závislost součinitele adheze na teplotě ledu



Obr. 32 Vznik aquaplaningu



Obr. 33 Mezní křivky aquaplaningu v závislosti na výšce vodního filmu h .

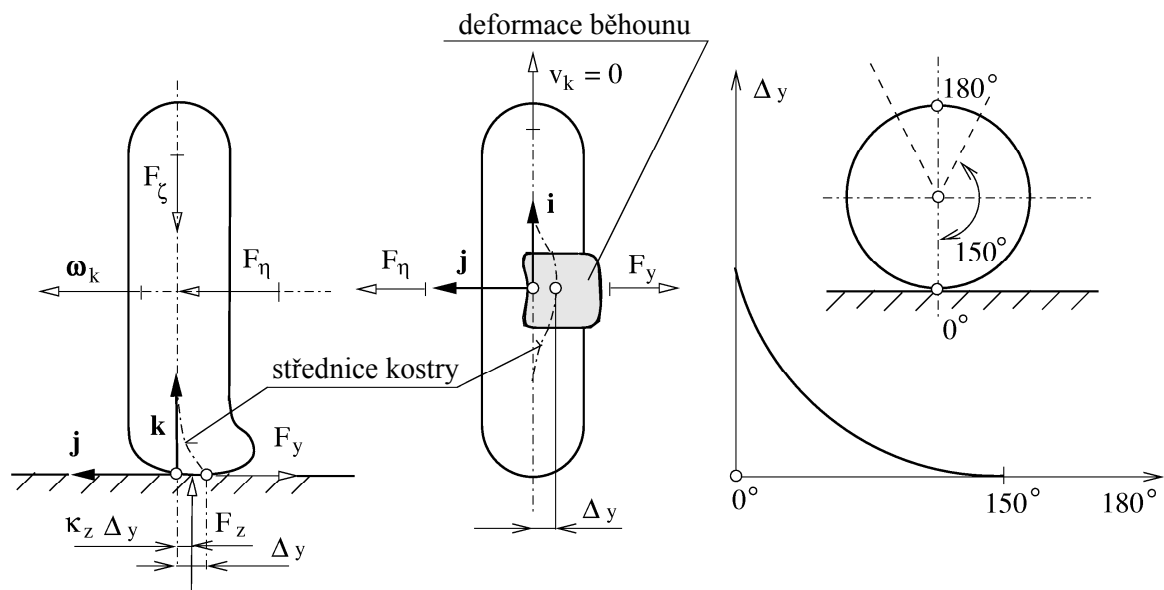


Obr. 34 Závislost součinitele tření na rychlosti a na tloušťce vodního filmu pro plnou a nulovou výšku profilu

Na obr. 34 je ještě zobrazena závislost součinitele tření na rychlosti při různé tloušťce vodního sloupce pro plnou a nulovou výšku profilu běhounu pneumatiky osobního automobilu zatížené radiální silou $F_{\zeta} = 3 \text{ kN}$ a nahuštěné na tlak $0,15 \text{ MPa}$.

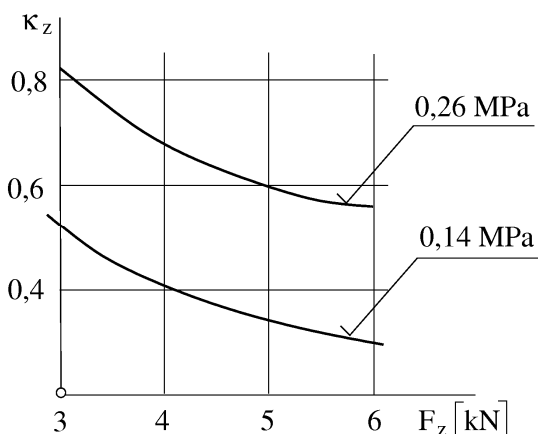
2.2 Valení při působení boční síly

V této kapitole ukážeme vznik vratného momentu vyvolaného boční silou u pneumatiky, která se valí po tuhé podložce. Základní představu získáme nejdříve u nerotující pneumatiky zatížené radiální silou F_{ζ} , obr. 35 a boční silou F_{η} působící z vozidla na kolo [1]. Působením boční síly se pneumatika bočně deformuje a její původní teoretický dotkový bod se posune o Δy do nové polohy. Deformace Δy se skládá z deformace kostry a z deformace běhounu. Kostra pneumatiky je zatížená silami, které na ní přenáší běhoun v délce dotkové plošky pneumatiky s vozovkou. Deformace kostry je největší ve středu dotkové plošky a po obvodě klesá k nule, kterou dosáhne v úhlu cca $\pm 150^\circ$, obr. 35, měřeno od středu dotkové plošky.



Obr. 35 Boční síla a vratný moment u stojící nerotující pneumatiky

U radiální pneumatiky je boční tuhost kostry nižší, ale v důsledku větší tuhosti bočního obvodového pásu se rozkládá na větší část obvodu. Deformace běhounu vůči kostře je nepatrná. Svislá reakce F_z nepůsobí ve středu dotykové plošky, ale ve vzdálenosti $\kappa_z \Delta y$, obr. 35, kde κ_z je součinitel posunutí, který závisí [1] na svislé reakci a na nahuštění pneumatiky. Pro diagonální pneumatiku je závislost znázorněna na obr. 36.



Obr. 36 Závislost součinitele κ_z na zatížení pneumatiky a na tlaku

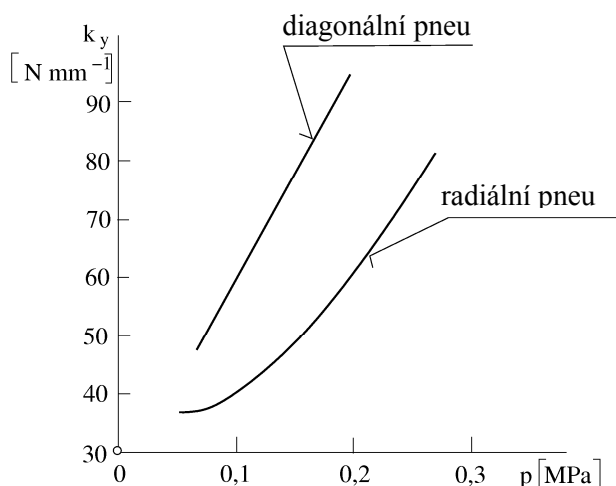
Boční síla

$$F_y = k_y \Delta y, \quad (21)$$

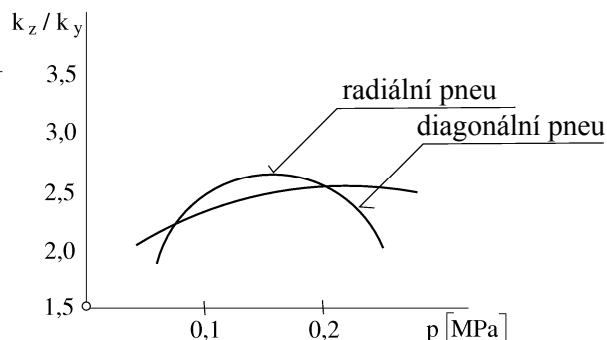
kde k_y je boční tuhost pneumatiky, vyvolaná silou F_η roste až k mezi bočního prokluzu, kdy dojde k bočnímu smyku pneumatiky. Potom je

$$\Delta_{y \max} = \frac{F_z f_y}{k_y}, \quad (22)$$

kde f_y je součinitel příčného tření. Boční tuhost pneumatiky k_y se s radiální silou mění málo [1]. Závislost boční tuhosti na tlaku nahuštění je ukázána na obr. 37 pro diagonální i radiální pneumatiku 155 – 44 zatíženou radiální silou $F_z = 2,2 \div 5 \text{ kN}$. Na obr. 38 je ukázána závislost poměru radiální a boční tuhosti k_z/k_y na tlaku nahuštění pneumatik. Působíme-li na stojící pneumatiku momentem M_ζ , obr. 39, natočí se pneumatika o úhel α tak, že kostra



Obr. 37 Závislost boční tuhosti na tlaku nahuštění



Obr. 38 Závislost poměru radiální a boční tuhosti na tlaku nahuštění

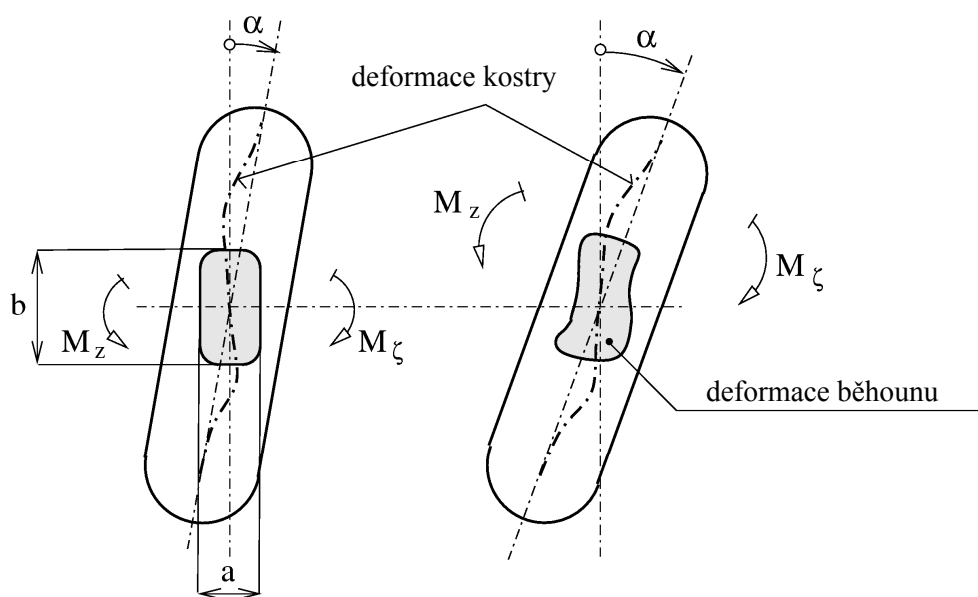
pneumatiky se zdeformuje do tvaru „S“ a stejně, ale méně významně se zdeformuje vůči kostře i střednice běhounu. Současně dojde i k podélné deformaci elementů běhounu. Deformací plošky vznikne mezi pneumatikou a vozovkou vratný moment

$$M_z = \xi_{zo} \alpha, \quad (23)$$

kde ξ_{zo} je vratná tuhost stojící pneumatiky. Vratná tuhost, která je u radiální pneumatiky běžně větší než diagonální, stoupá s rostoucí silou F_z . Dosažitelný mezní moment se udává vztahem

$$M_{z \max} \doteq \frac{1}{4} F_z f_y \left(1,5b + \frac{a}{2} \right), \quad (24)$$

kde a , b jsou rozměry dotykové plošky a f_y , jak bylo již řečeno, je součinitel bočního tření.



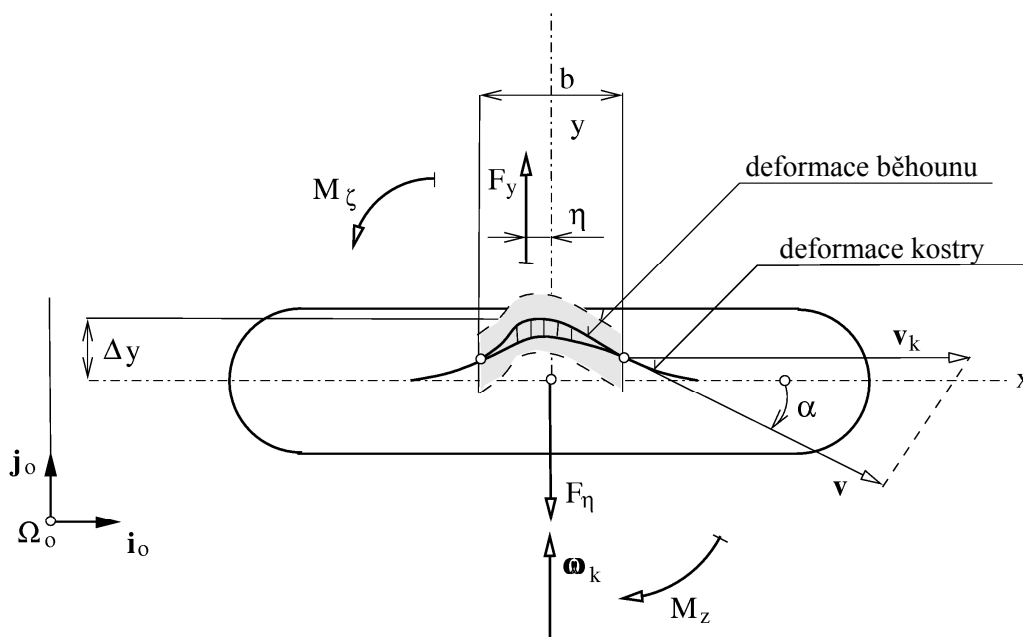
Obr. 39 Vznik vratného momentu M_z

2.2.1 Ustálené stavy valení

Uvažujeme nyní pneumatiku, která se valí po tuhé podložce konstantní rychlostí v ustáleném stavu. Ustáleným stavem budeme rozumět stav, kdy kinematické veličiny kol jsou konstantní minimálně 10s. Situace u rotujícího kola je odlišná od situace kola stojícího [1], neboť průběh deformace kostry nad dotykovou ploškou pneumatiky i deformace běhounu vůči kostře jsou závislé na čase. Pro další úvahy budeme uvažovat jednak nenakloněnou pneumatiku, která se odvaluje přímočaře za působení konstantní boční síly F_y a svislého momentu M_ζ a jednak nakloněnou pneumatiku valící se po kruhové dráze. V obou případech zatím neuvažujeme hnací nebo brzdící síly F_x .

2.2.1.1 Valení nenakloněné pneumatiky po přímé dráze

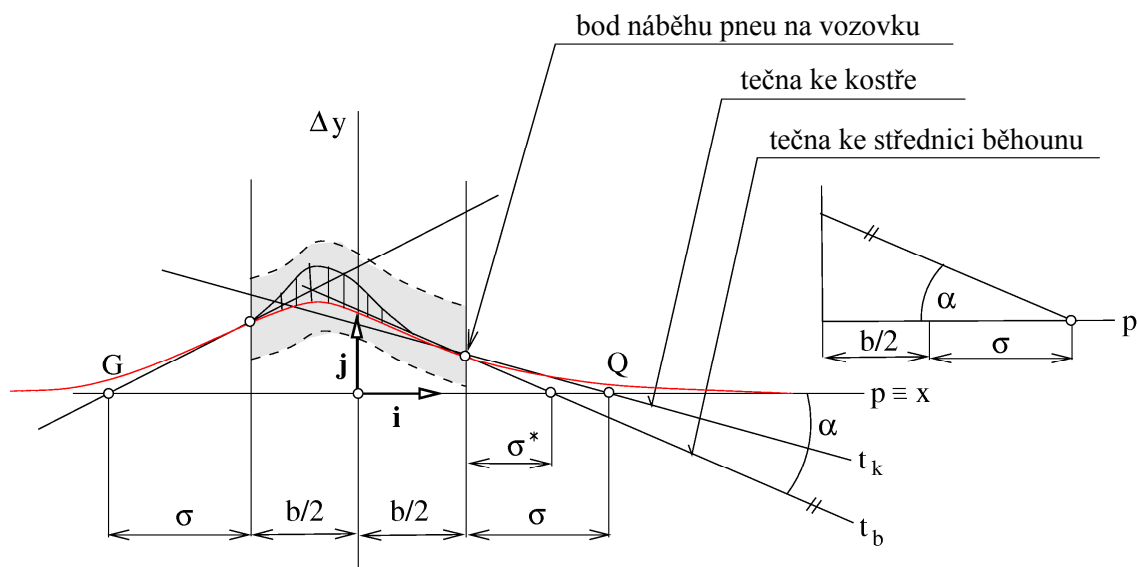
Deformace kostry pneumatiky při valení je podobná deformaci kostry u stojící pneumatiky s tím rozdílem, že maximální deformace je posunuta v podélném směru za střed dotykové plošky. Element běhounu dosedá na vozovku v počáteční hraně dotykové plošky s vozovkou v nedeformovaném stavu vůči kostře, která je již deformována. Při postupu dozadu při rotaci kola se element začíná bočně deformovat a tím vznikají elementární boční síly F_{yi} . Element se tedy neposunuje rovnoběžně s čelní rovinou kola, nýbrž pod jistým **úhlem směrové úchylky α** , obr. 40, který určuje směr valení kola při působení boční síly F_η .



Obr. 40 Deformace běhounu a kostry pneumatiky při valení se směrovou úchylkou

Situace je znázorněna na obr. 41, ze kterého je patrné, že úhel směrové úchylky α svírá tečna t_b ke střednici běhounu v bodě náběhu pneumatiky na podložku s přímkou symetrie $p \equiv x$, která je průsečnicí roviny symetrie kola a podložky. Úhel α je proto tvořen jednak úhlem který svírá zmíněná průsečnice p s tečnou t_k ke kostře pneumatiky a dále úhlem, který svírá tečna t_b ke střednici běhounu s tečnou t_k ke kostře. Průsečík Q tečny t_k s přímkou p vytíná na přímce p **relaxační délku σ** , na které přibližně klesne boční deformace kostry pneumatiky na

nulu při měření na obvodě kola. Při stanovení relaxační délky jsme neuvažovali boční deformaci běhounu pneumatiky vůči kostře. Relaxační délka σ je délka subtangenty k průhybové čáře kostry pneumatiky v bodě náběhu. Podobná situace platí i pro zadní část pneumatiky. Pro diagonální pneumatiku je $\sigma \doteq (1,7 \div 2,0)b$ a pro radiální je $\sigma \doteq (2,0 \div 3,0)b$, kde b je délka dotykové plošky. Pro přesnější a detailnější řešení se zavádí odvozená relaxační délka σ^* , obr. 41, která zahrnuje i boční deformaci běhounu pneumatiky vůči kostře a závisí na boční síle F_y . Pro $F_y \rightarrow F_z$ je $\sigma^* \doteq (0,4 \div 0,5) \sigma$.



Obr. 41 Vznik relaxační délky

Elementární boční síly F_{yi} , které se vyskytují po délce dotykové plošky, nemohou překročit hodnotu danou elementárním zatížením F_{zi} a elementárním bočním součinitelem smykové soudržnosti μ_{yi} , takže musí platit

$$F_{yi} \leq \mu_{yi} F_{zi} \quad (25)$$

a maximální možná boční deformace elementu běhounu potom je

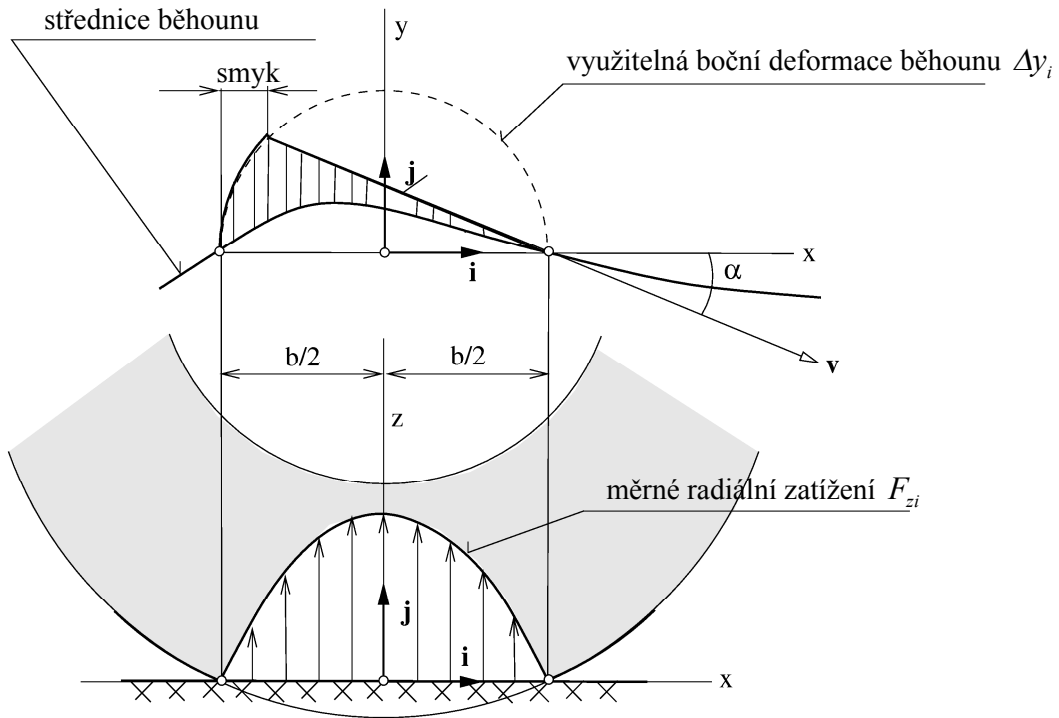
$$\Delta_{yi} = \frac{\mu_{yi} F_{zi}}{k_{yi}}, \quad (26)$$

kde k_{yi} je boční tuhost elementu. Protože rozložení elementárních radiálních sil F_{zi} po délce dotykové plošky má [1] přibližně parabolický tvar, obr. 42, má i průběh boční deformace elementů běhounu podobný tvar. V zadní části dotykové plošky jsou ale boční deformace elementů běhounu největší. Dojde-li k překročení maximálně možné deformace elementů, dojde ke smyku elementů po vozovce tak, jak je ukázáno na obr. 42. Pro malé úhly směrové úchylny $\alpha \leq 3^\circ$ je ale prokluz v zadní části dotykové plošky malý, takže velikost boční síly roste přibližně úměrně s růstem úhlu α . Proto můžeme přibližně psát

$$F_y \doteq u \alpha, \quad (27)$$

kde u je konstanta úměrnosti tohoto růstu, které říkáme **směrová tuhost pneumatiky**. Deformaci ve středu dotykové plošky můžeme potom pro malé α vyjádřit podle obr. 41 vztahem

$$\Delta_y = \left(\frac{b}{2} + \sigma \right) \alpha \wedge \alpha \doteq \operatorname{tg} \alpha . \quad (28)$$



Obr. 42 Vznik smyku elementů běhounu

Protože je také $\Delta_y = F_y / k_y$, můžeme vzhledem k rov. (27) psát

$$F_y = u \alpha = \Delta_y k_y = \left(\frac{b}{2} + \sigma \right) \alpha k_y , \quad (29)$$

odkud pro směrovou tuhost pneumatiky dostaneme

$$u = \left(\frac{b}{2} + \sigma \right) k_y . \quad (30)$$

Při zvětšování úhlu směrové úchylky α se zvětšuje deformace běhounu v zadní části dotykové plošky a v určité vzdálenosti od jejího počátku, obr. 42, dojde k dosažení adhezni elementární síly $\mu_{yi} F_{zi}$, rov. (25). Od tohoto místa dále se již elementární boční síly F_{yi} nezvětšují. Celková boční síla F_y se při dalším zvětšování úhlu směrové úchylky α ještě mírně zvětšuje až do jisté mezní hodnoty α_{mez}^F , kdy přestane růst a naopak mírně poklesne, obr. 43. Protože výslednice všech elementárních bočních sil F_{yi} neleží v rovině symetrie kola, obr. 40, ale za ní, vyvolá k vertikální ose kola vratný moment

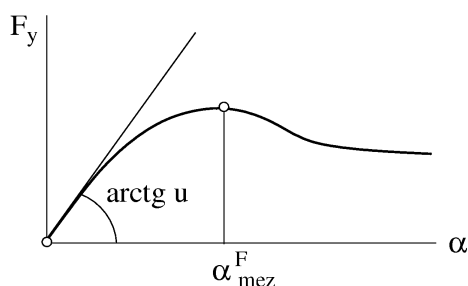
$$M_z = \eta F_y , \quad (31)$$

kde rameno η je, **pneumatický závlek**. Smysl vratného momentu je takový, že se snaží ztotožnit čelní rovinu kola se směrem valení kola. Závislost vratného momentu M_z na úhlu směrové úchylky α je silně nelineární, obr. 44 a může mít pro velké hodnoty úhlu α i

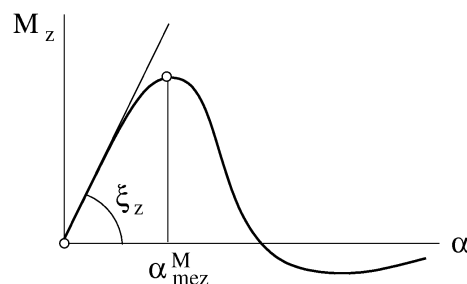
negativní vliv, kdy se snaží úhel α zvětšovat. Směrnice křivky vratného momentu M_z v počátku

$$\xi_z = \left(\frac{d M_z}{d \alpha} \right)_{\alpha=0}, \quad (32)$$

se nazývá vratnou tuhostí rotující pneumatiky. Lze určit, že je přímo úměrná radiálnímu zatížení pneumatiky F_z . Vratná tuhost nerotující pneumatiky ξ_{zo} byla zmíněna v rov.(23). Platí poměr $\xi_{zo}/\xi_z = 1,5 \div 2$, neboť u stojící pneumatiky vznikají i podélné smykové deformace elementů běhounu, které se u rotující pneumatiky nevyskytují. Při zvětšování úhlu směrové úchyly, kdy dochází v zadní části dotykové plošky ke zvětšování oblasti prokluzu, posouvá se, v důsledku změny boční deformace kostry i běhounu, působíště boční síly F_y dopředu. Největší hodnotu dosahuje pneumatický závlek pro $\alpha=0$. Protože je podle obr. 43 závislost boční síly F_y na α nelineární, je zřejmé, že průběh M_z na úhlu směrové úchyly bude více nelineární. Při úplném bočním smyku je $\alpha = \pi/2$ a $M_z = 0$.



Obr. 43 Průběh boční síly v závislosti na úhlu α



Obr. 44 Závislost vratného momentu na úhlu α

2.2.1.2 Valení naklonené pneumatiky po kruhové dráze

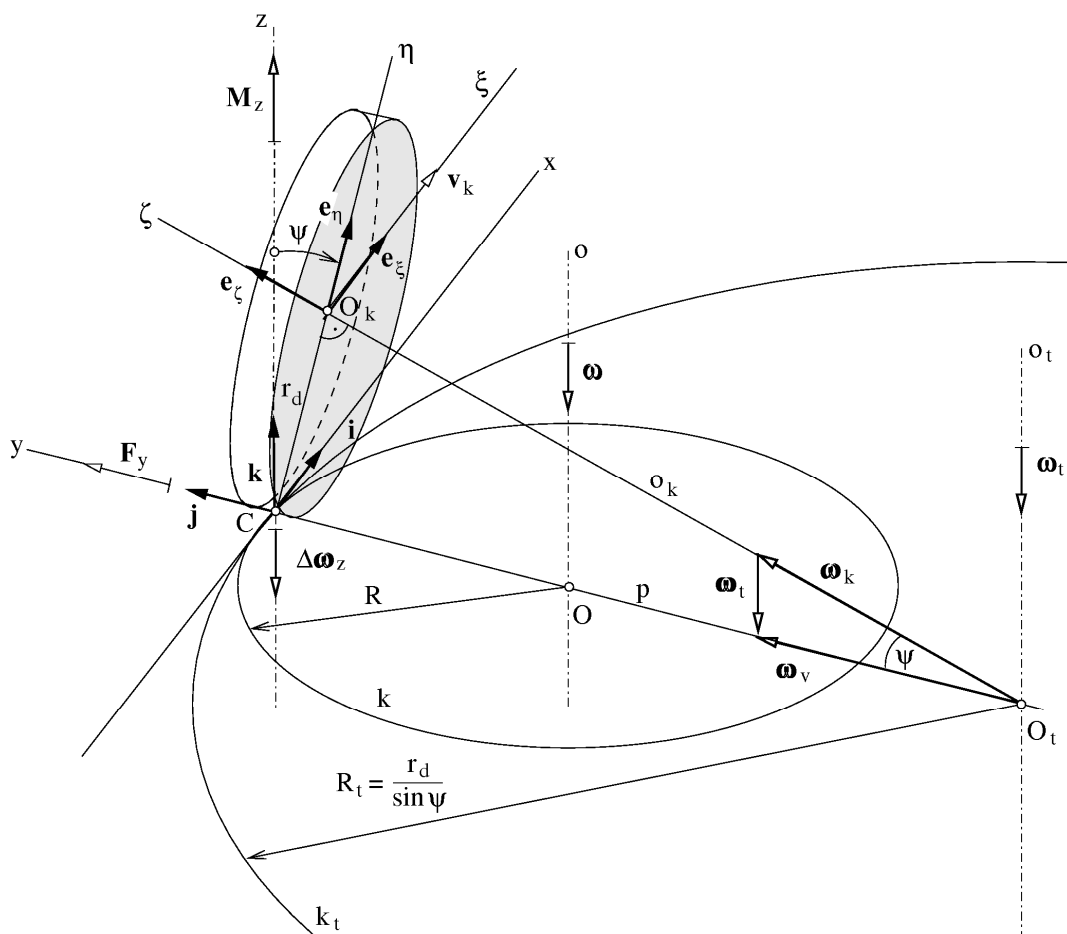
Uvažujme pneumatiku valící se rychlostí v_k po kruhové dráze k o poloměru R , která je sklopená od svislé přímky o úhel ψ . Pokud by dotkový bod C měl být pólem pohybu, musela by se pneumatika pohybovat po kružnici k_t o poloměru R_t , obr. 45, která má střed O_t ve vrcholu kužele tvořeného dotykovou přímkou pneumatiky p a osou kola o_K . Úhlová rychlost valení kužele ω_v je dána v tomto případě součtem dvou úhlových rychlostí

$$\omega_v = \omega_k + \omega_t, \quad (33)$$

kde ω_k je úhlová rychlost kola a ω_t je úhlová rychlost rotace kolem svislé osy o_t . Kolo koná sférický pohyb složený z těchto dvou rotací. Protože ale kolo zatáčí kolem osy o_z a pohybuje se tak po kružnici k o poloměru $R < R_t$ úhlovou rychlostí ω , musí se navíc otáčet kolem svislé osy z přídatnou úhlovou rychlostí

$$\Delta\omega_z = |\omega - \omega_t|, \quad (34)$$

která je relativní úhlovou rychlostí mezi pneumatikou a podložkou. Po dosazení dostaneme



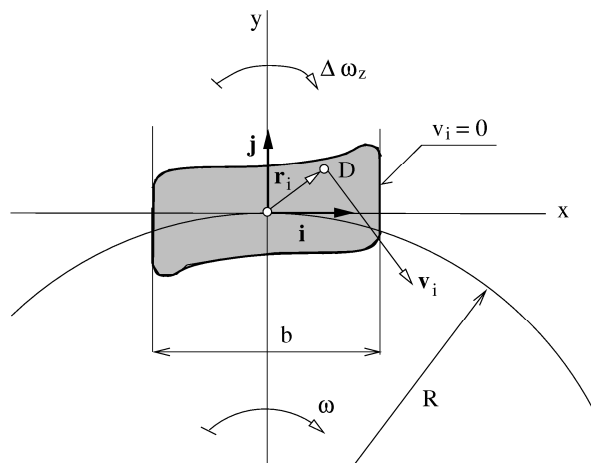
Obr. 45 Kinematika pohybu nakloněné pneumatiky po kruhové dráze

$$\Delta\omega_z = v_k \left(\frac{1}{R} - \frac{\sin\psi}{r_d} \right). \quad (35)$$

Vlivem úhlové rychlosti $\Delta\omega_z$ se budou elementy běhounu pneumatiky uvnitř dotykové plošky, obr. 46, deformovat rychlostí

$$\mathbf{v}_i = \Delta\boldsymbol{\omega}_z \times \mathbf{r}_i. \quad (36)$$

Body na náběžné hraně plošky nejsou touto deformační rychlostí zatíženy a jejich deformace je nulová. Z uvedeného popisu je zřejmé, že pneumatika nakloněná o úhel ψ a valící se po kruhové dráze o poloměru $R < R_t$ bude podrobena jistě boční síle F_y a vratnému momentu M_z , které jsou vyvolány boční a podélnou nesymetrickou torzní deformací elementů běhounu. Běhoun nabíhá na vozovku v nezátíženém nedeformovaném stavu. V příčném, bočním, smyku jsou největší deformace ve středu dotykové plošky a v podélném směru na konci plošky při výběhu elementů.



Obr. 46 Rychlost bodu D dotykové plošky

Pro malé hodnoty úhlu ψ , $\sin\psi \doteq \psi$, můžeme [1] použitím rov. (35) přibližně psát

$$F_y = k_r \left(\frac{1}{R} - \frac{\psi}{r_d} \right), \quad M_z = \xi_{zr} \left(\frac{1}{R} - \frac{\psi}{r_d} \right), \quad (37)$$

kde $k_r = k_y b^2 \doteq 0,25 \div 0,6$ a $\xi_{zr} = \xi_{zo} \frac{b}{2} \doteq 1,0 \div 1,5$ jsou konstanty [1] a výraz v závorce je rozdíl křivostí reálné a teoretické kruhové dráhy. Pro pneumatiku naklopenou o úhel ψ a pohybující se po dráze $R \rightarrow \infty$, směřuje boční síla F_y ve směru naklopení horní části pneumatiky a moment M_z se snaží dráhu napřímít.

Při uvedených úvahách jsme neuvažovali úhel směrové úchyly. Jestliže se valí kolo naklopené o úhel ψ po kruhové dráze o poloměru R s konstantním úhlem směrové úchyly α , jsou výsledné deformace elementů běhounu dány součtem deformací příslušných jednotlivým účinkům, tedy boční deformaci, torzní deformaci a deformaci od směrové úchyly. Protože největší příčné deformace vznikají při valení naklopené pneumatiky, $\psi \neq 0$ po kruhové dráze, $R \neq 0$, uprostřed dotykové plošky, zatímco při valení pneumatiky pod úhlem směrové úchyly α v zadní části dotykové plošky, obr. 42, ovlivňují ψ a R při malých úhlech α velikost prokluzové oblasti v zadní části dotykové plošky jen málo. Můžeme proto použít zákon superpozice a přibližně psát, rov. (37) a rov. (27) a rov. (32) pro boční sílu a vratný moment vztahy

$$F_y = -u\alpha + k_r \left(\frac{1}{R} - \frac{\psi}{r_d} \right), \quad M_z = \xi_z \alpha + \xi_{zr} \left(\frac{1}{R} - \frac{\psi}{r_d} \right), \quad (38)$$

kde u , rov. (27), je směrová tuhost a ξ_z , rov. (32), je vratná tuhost rotující pneumatiky.

2.2.1.3 Valení pneumatiky při působení boční a podélné síly

Uvažujeme nenaklopenou pneumatiku zatíženou radiální silou F_z , boční silou F_η a kroutícím momentem M_k , který vyvolává obvodovou sílu F_x , obr. 3. Pneumatika zatížená těmito silovými účinky se odvaluje při dopředném pohybu s měrným skluzem δ , rov. (4) a obr. 14.

Rozložení radiálních a obvodových sil v dotykové plošce pneumatiky pro přímý pohyb bez působení boční síly je ukázáno na obr. 18. Nyní k těmto silám ještě připojíme síly boční.

Rozložení elementárních sil v dotykové plošce je znázorněno na obr. 47. Přibližné rozložení radiálních sil F_{zi} je ukázáno v horní části obrázku. V níže položeném obrázku je znázorněno rozložení tečných sil F_{ti} , které se skládají z elementárních bočních sil F_{yi} a elementárních podélných sil F_{xi} podle vztahu

$$F_{ti} = \sqrt{F_{xi}^2 + F_{yi}^2}. \quad (39)$$

Elementární síly F_{yi} vzniknou v důsledku boční deformace elementů běhounu Δy_i , obr. 41, vlivem valení pod úhlem směrové úchyly α . Elementární síly F_{xi} vzniknou podélnou deformací Δx_i elementů běhounu jak je ukázáno na spodní části obrázku, která znázorňuje

$$\begin{aligned}\Delta_{yi} &= j \, \alpha \, , \\ F_{ti} &= \mu_v \, F_{zi} \, ,\end{aligned}\tag{40}$$

The diagram illustrates the forces and geometry of a ship's hull cross-section during a maneuver. It is divided into four horizontal sections, each showing a cross-section of the hull (shaded area) and the corresponding force distribution (vertical lines) and resultant force (curved line).

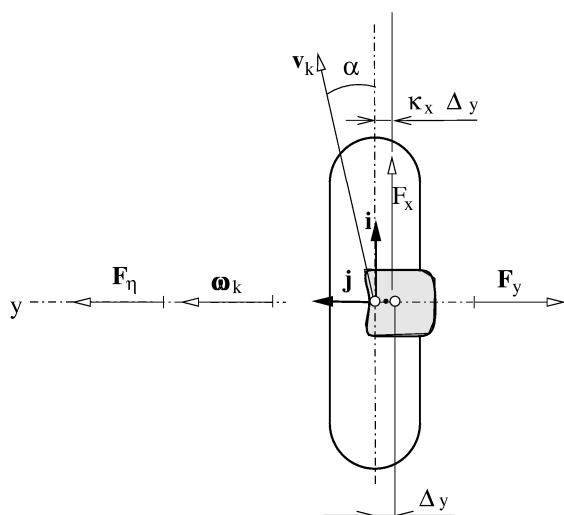
- Top Section:** Shows the hull cross-section with a vertical z -axis and a horizontal x -axis. A velocity vector \mathbf{v}_k is shown at an angle ω_k to the z -axis. The resultant force F_{zi} is shown as a vertical arrow.
- Second Section:** Shows the hull cross-section with a vertical z -axis and a horizontal x -axis. The resultant force F_{ti} is shown as a vertical arrow. The distance from the center of gravity Ω to the point of application of the force is j . The maximum value of the force distribution is labeled $F_{ti \text{ mez}}$.
- Third Section:** Shows the hull cross-section with a vertical z -axis and a horizontal x -axis. The resultant force $F_{yi}(\Delta_{yi})$ is shown as a vertical arrow. The distance from the center of gravity Ω to the point of application of the force is j_m . The angle of the resultant force relative to the z -axis is α . The text "uvažovaný průběh střednice kostry" (assumed course of the keel centerline) is shown.
- Bottom Section:** Shows the hull cross-section with a vertical z -axis and a horizontal x -axis. The resultant force $F_{xi}(\Delta_{xi})$ is shown as a vertical arrow. The distance from the center of gravity Ω to the point of application of the force is $\Delta_{xi}(\delta)$. The text "Oblast prokluzu" (slip area) is shown.

50

Při dalším zvyšování elementárních sil se oblast prokluzu rozšíří na celou dotykovou plochu a nastává smyk pneumatiky po vozovce. Při působení hnací síly F_x se vratný moment M_z skládá ze dvou složek

$$M_z = M'_z + M''_z, \quad (41)$$

kde složka M'_z je vyvolána zkřivením kostry pneumatiky způsobeném úhlem směrové úchyly α , obr. 39. Druhá složka M''_z vzniká v důsledku bočního posunutí obvodové síly F_x



ke kterému dojde, obr. 48, při boční deformaci střednice kostry pneumatiky, obr. 35 a 40. Síla F_x neleží potom na ose x , ale je rovnoběžně posunutá o míru $\kappa_x \Delta y$. Situace je patrná z obr. 48, ze kterého můžeme pro moment M''_z psát vztah

$$M''_z = F_x \kappa_x \Delta y. \quad (42)$$

Protože platí $F_y = k_y \Delta y$, můžeme rov. (42) přepsat do tvaru

$$M''_z = \frac{F_x \kappa_x F_y}{k_y}. \quad (43)$$

Obr. 48 Boční posunutí obvodové síly F_x

V důsledku nerovnoměrného rozložení elementárních vertikálních sil F_{zi} a podélné i příčné deformace běhounu a kostry, jsou skutečné poměry v dotykové plošce komplikovanější.

2.2.1.4 Mezní součinitelé soudržnosti

Součinitelům soudržnosti u pneumatiky valící se bez působení boční síly a to jak na elementární úrovni tak i na celé dotykové ploše, byla věnována kap. 2.1.2. Nyní se zmíníme o součinitelích soudržnosti u pneumatiky, která se valí za působení boční síly. Budeme uvažovat maximálně dosažitelné hodnoty součinitelů soudržnosti v podélném a v příčném směru. Součinitel boční soudržnosti μ_{yy} je vždy nižší než součinitel podélné soudržnosti μ_{xy} . Mezní součinitelé soudržnosti pneumatiky při valení jsou rozdílní pro režim brzdění a pro hnací režim. Větší rozdíl je u pneumatiky diagonální než u radiální. Mezní hodnoty součinitelů soudržnosti pro různé rychlosti a různé tloušťky vodní vrstvy na povrchu vozovky, jsou ukázány [1] pro diagonální pneumatiku na obr. 49 ze kterého je patrný odlišný tvar křivek pro brzdění a pro hnání. Viditelný je i nepravidelný tvar křivek.

V předcházejícím výkladu jsme zavedli dva důležité pojmy a to *elementární součinitel soudržnosti* pro element dezénu pneumatiky a *součinitel soudržnosti* pro celou dotykovou plochu. Pro lepší zapamatování a odlišení, uvedeme nyní jejich přehled.

Elementární součinitelé soudržnosti

μ_{xi} stacionární součinitel soudržnosti,

μ_{si} třecí součinitel soudržnosti

Součinitelé soudržnosti

μ_x stacionární součinitel soudržnosti, vyskytující se při valení,

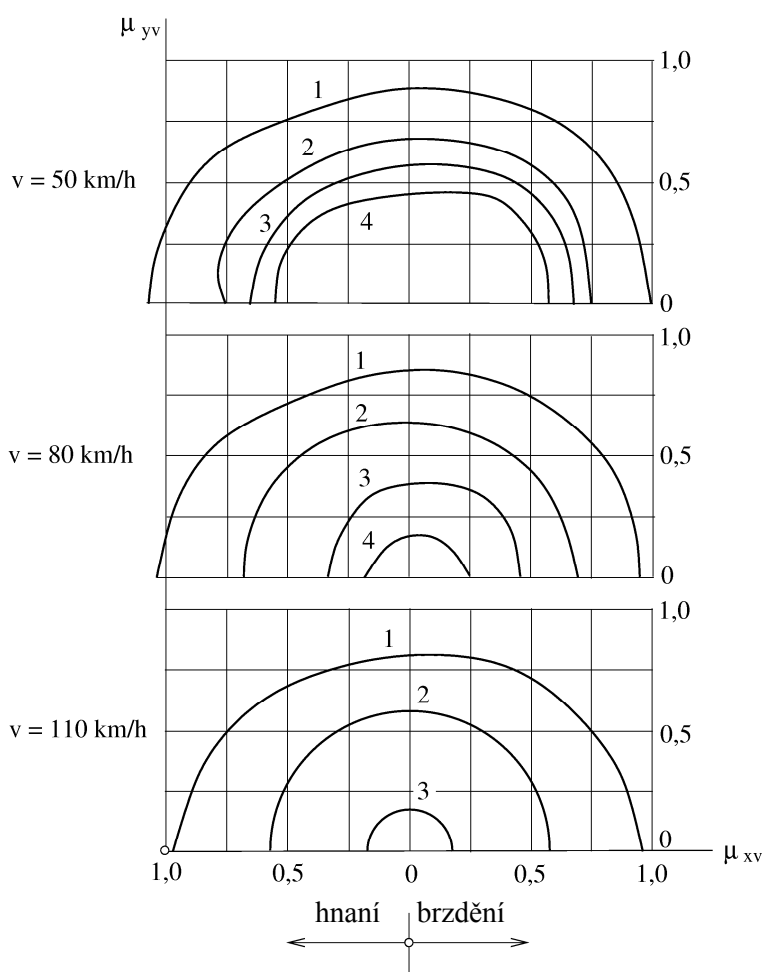
μ_s třecí součinitel soudržnosti, nebo také součinitel soudržnosti skluzu, který běžně nazýváme *součinitelem tření* a označujeme písmenem f , takže $f = \mu_s$,

$\mu_v = \max \mu_x$ je mezní hodnota stacionárního součinitele soudržnosti, který běžně nazýváme *součinitelem adheze*, obr. 15 a označujeme $\varphi = \mu_v$, vyskytuje se při valení,

μ_v $\left\{ \begin{array}{l} \mu_{yv} \text{ součinitel příčné, boční, soudržnosti při valení,} \\ \mu_{xv} \text{ součinitel podélné soudržnosti při valení,} \end{array} \right.$

μ_{xv} součinitel podélné soudržnosti při valení,

$f_y = \max \mu_{yv}$ součinitel příčného tření.



diagonální pneu

$F_z = 2,5 \text{ kN}$

$p = 0,15 \text{ Mpa}$

vzorek běhounu 100%

tloušťka vodní vrstvy

$v \text{ mm}$

1 0 mm (sucho)

2 0,2 mm

3 1,0 mm

4 2,0 mm

Obr. 49 Mezní součinitelé soudržnosti pro brzdící a hnací režim jízdy

2.2.1.5 Pneumatika na mezi bočního smyku

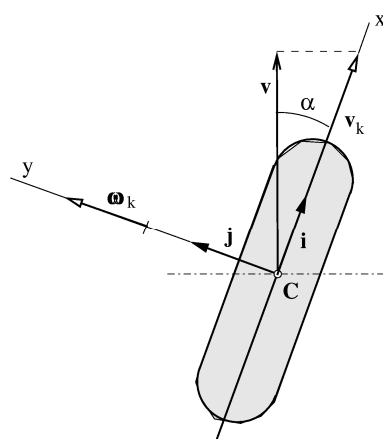
Pohybuje-li se pneumatika vlivem působících sil s velkými úhly směrových úchylek α a s velkými měrnými skluzy δ , může nastat situace, kdy se celá dotyková plocha pneumatiky s vozovkou dostane do oblasti smyku. Potom model dějů který jsme doposud uváděli, přestává platit a zjednodušeně si můžeme představit, že dotyková ploška degenerovala do

bodu C . Uvažujeme, obr. 50, že pneumatika rotující úhlovou rychlostí ω_k se pohybuje dopředu rychlostí $v = v_k \cos \alpha$ pod úhlem směrové úchytky α , kde $v_k = \omega_k r$. Pneumatika se může nacházet v brzdícím nebo v hnacím režimu jízdy, které jsou znázorněny na obr. 51, kdy se celá dotyková ploška nachází ve smyku. Potom se v místě dotyku pneumatiky s vozovkou vyskytne v podélném směru smyková rychlost v_{sx} . Při brzdění je dopředná skluzová rychlost dána vztahem

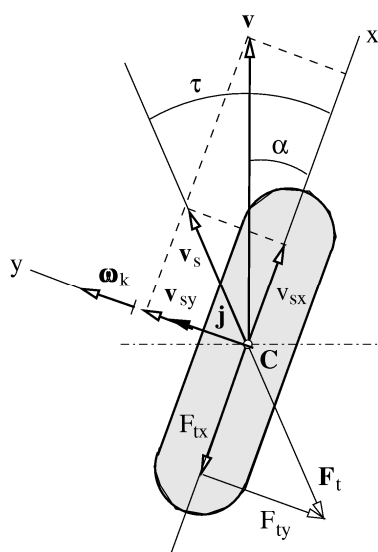
$$v_{sx} = (\omega_k - \omega_s) r_d, \quad (44)$$

kde ω_k je úhlová rychlost kola při čistém valení a ω_s odpovídá skluzové rychlosti v podélném směru. Podobně je tomu i při hnacím režimu jízdy, kde dochází k prokluzu kola jak je ukázáno v kap. 1.2.2. Pokud jsou hodnoty α a δ takové, že složka rychlosti v_{sy} je již na hranici bočního skluzu, je výsledná rychlost skluzu v_s odchýlena od osy x o úhel τ a její velikost je

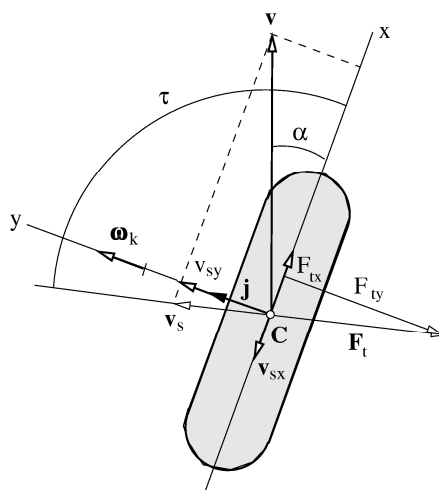
$$v_s = \sqrt{v_{sx}^2 + v_{sy}^2}. \quad (45)$$



Obr. 50 Pohyb pneumatiky pod úhlem směrové úchytky α



brzdící režim jízdy



hnací režim jízdy

Obr. 51 Pohyb pneumatiky na mezi bočního smyku

Na její nositelce musí ležet výsledná tečná síla F_t složená ze síly dopředné F_{tx} a boční F_{ty} . Připomeňme si, že dopředná síla F_x působící na obvodu kola, kap. 1.3, je kreslena tak, jak je uváděno v základním kurzu mechaniky, jako reakční síla působící z vozovky na kolo. Stejná úvaha platí i pro tečnou sílu F_t . Analogická situace platí i při hnacím režimu jízdy, kdy dochází k prokluzu kola.

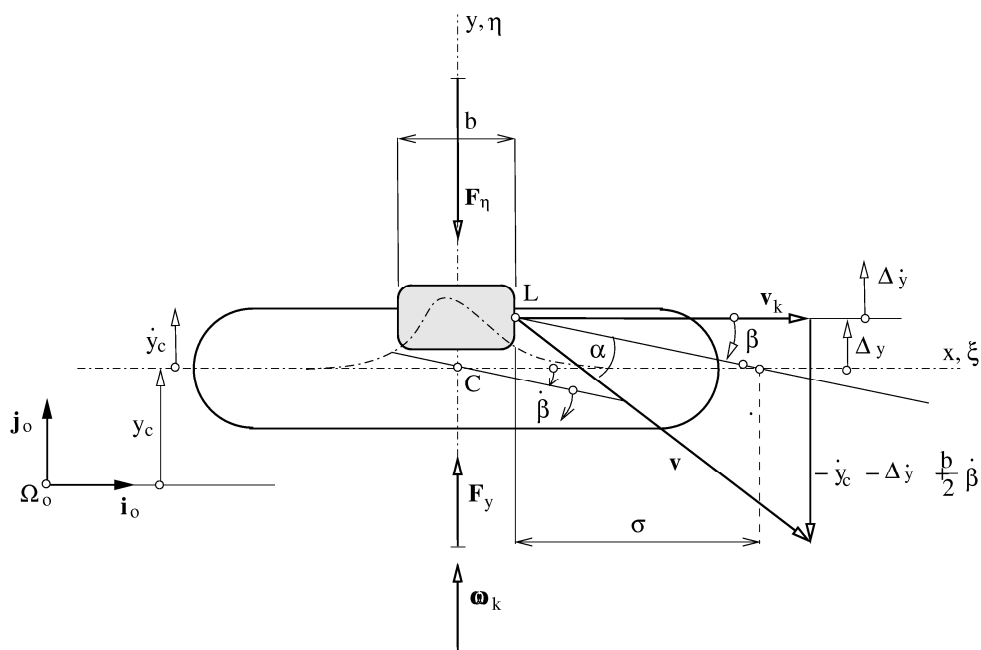
2.2.2 Neustálené stavy valení

Ustálenými stavy valení pneumatiky rozumíme jízdní stavy, které se nemění po dobu minimálně 10 s a mají na tomto intervalu statický charakter. Skutečnost je ale taková, že k této situaci prakticky nedochází a ke změně jízdních stavů dochází v mnohem kratších intervalech. Při reálném pohybu pneumatiky dochází k jejímu natáčení řidičem s frekvencí $0 \div 0,75 \text{ Hz}$, k bočnímu a vertikálnímu posouvání, naklápění a natáčení vlivem pérování s frekvencemi $1 \div 2,5 \text{ Hz}$ a $7 \div 14 \text{ Hz}$ a k bočnímu posouvání a natáčení v důsledku kmitání řízení s frekvencí $5 \div 14 \text{ Hz}$. Již při frekvenci $0,1 \text{ Hz}$ dochází k fázovému posunu mezi vstupní výchylkou a vznikem sil a momentů. To je základ neustáleného jízdního stavu valení pneumatiky, která se trvale nachází v přechodu z jednoho jízdního stavu do druhého, při kterém na kolo působí vratné momenty. Důsledkem je, že úhel směrové úchylny α se mění v závislosti na čase. Časovou změnu α můžeme vyjádřit buď pro bod ležící na středě dotykové plošky, nebo na její hraně.

Pro demonstraci nestacionárního pohybu pneumatiky použijeme [1] matematický model von-Schlippeho, kdy uvažujeme, obr. 52, bod L náběžné hrany dotykové plošky pneumatiky, která se valí po vozovce stálou úhlovou rychlostí ω_k a je v daném okamžiku natočena od přímého

směru jízdy o úhel $\beta \leq 12^\circ$. Kromě dopředné rychlosti se bod L pohybuje v bočním směru v důsledku nerovnosti vozovky rychlostí \dot{y}_c , v důsledku boční síly rychlostí $\Delta \dot{y}$ a v důsledku natáčení pneumatiky kolem svislé osy procházející bodem C o úhel β , rychlostí přibližně $b/2 \dot{\beta}$. Takže jeho boční rychlost je přibližně

$$v_y = -\dot{y}_c - \Delta \dot{y} + \frac{b}{2} \dot{\beta} . \quad (46)$$



Obr. 52 Okamžitý úhel směrové úchylny α při nestacionárním pohybu

Potom můžeme podle obr. 52 přibližně psát

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) \doteq \frac{-\frac{dy_c}{dt} + \frac{d\beta}{dt} \frac{b}{2} - \frac{d\Delta_y}{dt}}{v_k} . \quad (47)$$

V tomto vztahu, vzhledem k malým hodnotám α a β , uvažujeme, že rychlost příslušná rotaci $\dot{\beta}$ leží v ose y . Z důvodu malých hodnot α a β můžeme pro úhel α z rov. (47) psát

$$\alpha \doteq -\beta + \frac{1}{v_k} \left(-\frac{dy_c}{dt} + \frac{d\beta}{dt} \frac{b}{2} - \frac{d\Delta_y}{dt} \right) . \quad (48)$$

Současně můžeme přibližně psát pro $\frac{b}{2} < \sigma$

$$\operatorname{tg} \alpha \doteq \alpha = \frac{\Delta_y}{\sigma} . \quad (49)$$

Tento vztah platí přesně pro úhel α měřený od čelní roviny, obr. 41, takže v našem případě platí přibližně. Po dosazení do rov. (48) dostaneme

$$\frac{\Delta_y}{\sigma} v_k + \frac{d\Delta_y}{dt} = -\beta v_k - \frac{dy_c}{dt} - \frac{d\beta}{dt} \frac{b}{2} . \quad (50)$$

Protože je, rov. (21) a (30),

$$F_y = k_y \Delta_y, \quad k_y \doteq \frac{u}{\sigma} \quad \text{pro} \quad \frac{b}{2} < \sigma , \quad (51)$$

kde u je směrová tuhost, můžeme pro boční posunutí psát vztah

$$\Delta_y = \frac{F_y}{k_y} = \frac{F_y \sigma}{u} . \quad (52)$$

Po dosazení do rov. (50) dostaneme

$$\frac{d}{dt} \frac{F_y \sigma}{u} + \frac{F_y \sigma}{u \sigma} v_k = -\beta v_k - \frac{d}{dt} y_c + \frac{d}{dt} \beta \frac{b}{2} / \frac{u}{\sigma} . \quad (53)$$

Po úpravě dostaneme výsledný tvar diferenciální rovnice pro změnu boční síly v závislosti na čase

$$\frac{dF_y}{dt} + F_y \frac{v_k}{\sigma} = \frac{u}{\sigma} \left(-\beta v_k - \frac{dy_c}{dt} + \frac{d\beta}{dt} \frac{b}{2} \right) . \quad (54)$$

Pro $v_k = \text{konst.}$ je $dx = v_k dt$ a můžeme rovnici upravit na tvar

$$\frac{dF_y}{dx} + F_y \frac{1}{\sigma} = \frac{u}{\sigma} \left(-\beta - \frac{dy_c}{dx} + \frac{d\beta}{dx} \frac{b}{2} \right) . \quad (55)$$

Rov. (55) určuje hledanou závislost $F_y(x) = 0$. Vlivem působení síly $F_y(x)$ vznikne na kole vratný moment

$$M_z = M'_z + M''_z \quad , \quad (56)$$

kde $M'_z[F_y(\alpha)]$ je moment vyvolaný změnou úhlu směrové úchylky α a $M''_z(\beta)$ je moment vyvolaný zkřivením kostry pneumatiky vlivem jejího natáčení kolem svislé osy. Popsaná situace je ve skutečnosti složitější, neboť veličiny v rovnicích nejsou konstantní.