



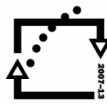
evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt CZ.1.07/2.2.00/15.0383
Inovace studijního oboru Dopravní a manipulační technika
s ohledem na potřeby trhu práce

Mechanika vozidel

Část 4

Učební text k předmětu
KME/MV Mechanika vozidel

doc.Ing.Jaromír Švígler, CSc.

2013

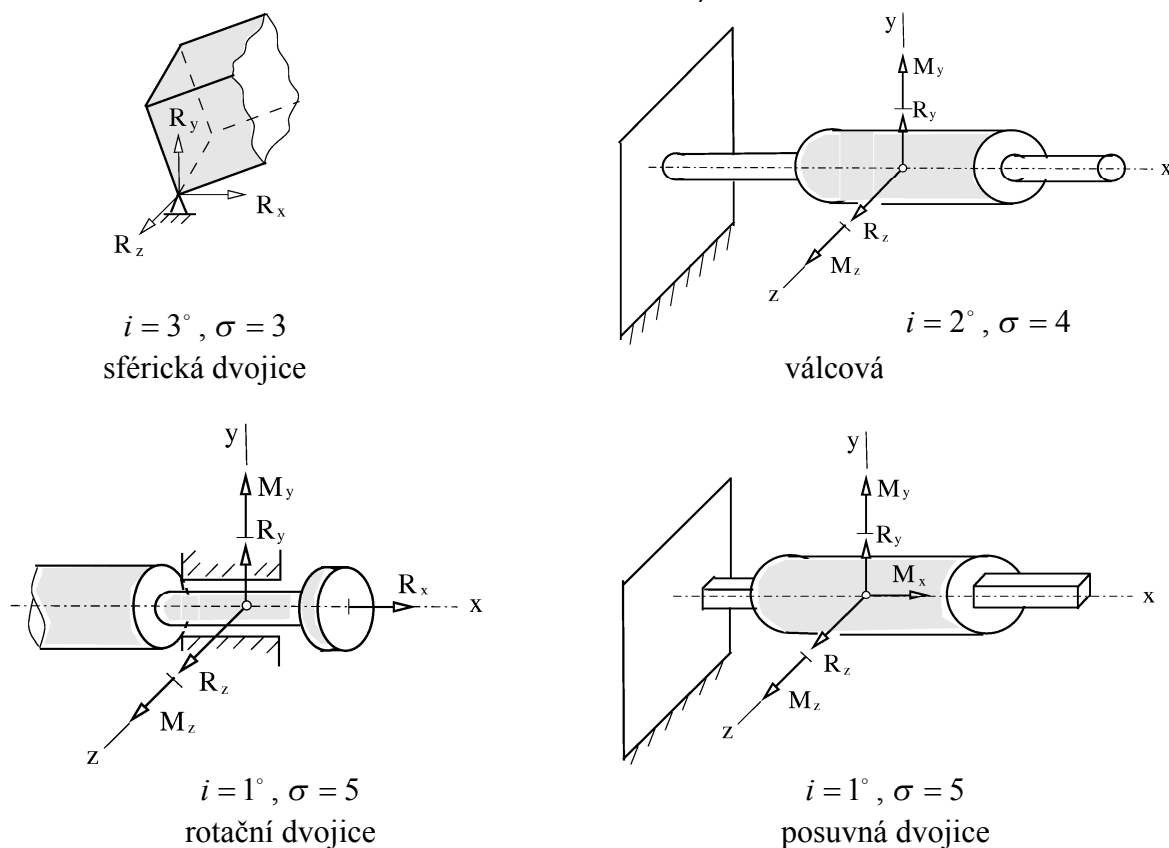
4. KINEMATICKÁ ANALÝZA VOZIDLOVÝCH MECHANISMŮ

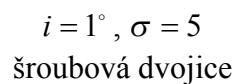
Mechanismy, které tvoří konstrukční základ různých vozidlových ústrojí a zařízení, jsou tvořeny soustavou těles, která jsou vzájemně vázána **kinematickými dvojicemi**. Tělesa spojená kinematickými dvojicemi vytvářejí kinematické řetězce, které mohou být uzavřené, otevřené, nebo smíšené. Stane-li se v uzavřeném kinematickém řetězci některý člen rámem, hovoříme o **vázaném kinematickém řetězci**, nebo také běžněji o **mechanické soustavě**, případně o **mechanismu**. Počet stupňů volnosti [4] prostorové mechanické soustavy určíme pomocí vazbové rovnice

$$i = 6(n-1) - \sum_{j=1}^5 j d_j, \quad (89)$$

kde 6 je počet stupňů volnosti tělesa v prostoru, n je počet členů soustavy včetně rámu, d_j je počet kinematické dvojice j -té třídy a j je dvojice j -té třídy, která snižuje pohyblivost soustavy o j stupňů volnosti. Vazbová rovnice pro rovinné soustavy těles byla uvedena v základním kurzu mechaniky. Můžeme ovšem použít i rov. (89) s tím, že těleso v rovině má 3 stupně volnosti. Vzájemná poloha sousedních členů vázané mechanické soustavy je určena souřadnicemi příslušných kinematických dvojic, které vytvářejí **kinematické vazby**, které mohou být holonomní nebo neholonomní, případně reonomní, tj. závisí na čase, nebo skleronomní, na čase nezávislé. O holonomních vazbách hovoříme tehdy, jestliže se ve vazbové podmínce neobjeví rychlost. Vyskytuje-li se ve vazbové podmínce rychlost, hovoříme o vazbě neholonomní. Přehled kinematických dvojic pro rovinné vázané kinematické řetězce je uveden v [9]. Přehled základních kinematických dvojic pro prostorové vázané soustavy je ukázán na obr. 61, kde i je počet stupňů volnosti a σ je počet reakčních účinků ve vazbě. U nižších kinematických dvojic dochází k dotyku v ploše, kdežto u vyšší kinematické dvojice je dotyk dvou sousedních těles v bodě, nebo v křivce.

Nižší kinematické dvojice



 $i = 5^\circ, \sigma = 1$

obecná dvojice

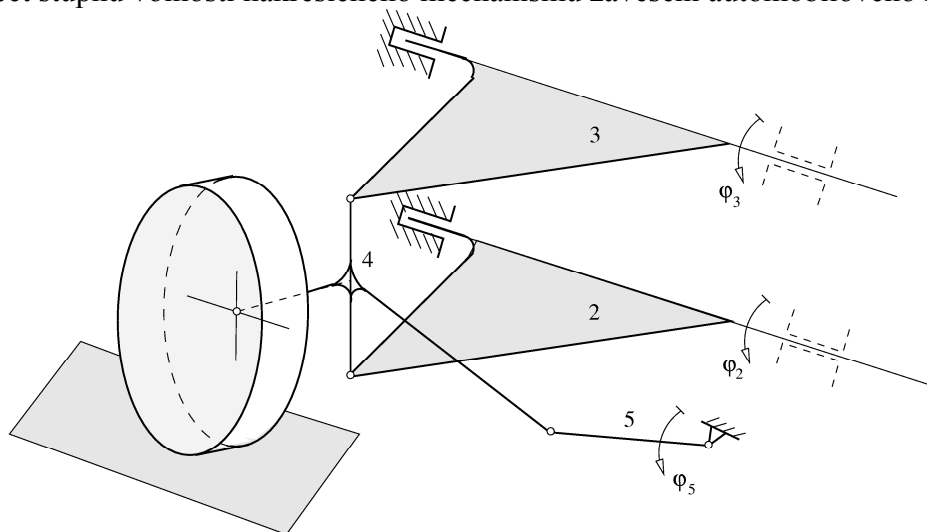
kongruentní plochy

Obr. 61 Kinematické dvojice prostorových vázaných soustav

Určení stupňů volnosti prostorového mechanismu si ukážeme na následujícím vázaném mechanickém systému obr. 62, který představuje uložení neřízeného automobilového kola v lichoběžníkovém závěsu.

Příklad 5

Určete počet stupňů volnosti nakresleného mechanismu zavěšení automobilového kola.



Obr. 62 Neřízené kolo na lichoběžníkovém závěsu

Počet stupňů volnosti prostorového mechanického systému na obr. 62 určíme pomocí rov. (89), kde $n = 5$ je počet členů soustavy, $j = 4 \wedge d_4 = 3$ je počet sférických dvojic, $j = 2 \wedge d_2 = 5$ je počet rotačních dvojic. Po dosazení dostaneme

$$i = 6(5-1) - 4 \cdot 3 - 2 \cdot 5 = 2^\circ . \quad (90)$$

Výsledkem jsou dva stupně volnosti. Jeden stupeň volnosti přísluší rotaci dolního ramene φ_2 , případně horního ramene φ_3 , neboť oba pohyby jsou vzájemně pevně kinematicky svázány a druhý stupeň volnosti náleží rotaci členu 5 kolem své osy, kterou nazveme parazitní rotací, neboť z hlediska pohyblivosti soustavy nemá význam. Reálným, technicky použitelným výsledkem je proto

$$i = 1^\circ . \quad (91)$$

Je potřebné si uvědomit, že z kinematického hlediska je každý ze členů 2 a 3 uložen v jednom radiální ložisku. To znamená, že čárkovane označená radiální ložiska nebereme při určování stupňů volnosti v úvahu. Z technického hlediska je takovýto letný způsob uložení ale nepříjemný a proto při konstrukční realizaci je nezbytné radiální ložiska použít. Vidíme, že kinematický a technický pohled nemusí být nutně stejný. Vždy ale platí, že technické řešení musí respektovat závěry kinematického řešení. Člen 5, který stabilizuje polohu kola, představuje, při případném připojení kola k řídicímu ústrojí, rameno řízení, viz kap. 5.

Kinematickou analýzu můžeme provádět použitím

- analytické geometrie,
- vektorového počtu,
- maticového počtu

Použití některé z metod závisí na složitosti a typu řešení úlohy. Důležitým hlediskem je, zda se jedná o úlohu rovinnou nebo prostorovou. S metodou založenou na analytické geometrii jste se seznámili v základních předmětech mechaniky, kde se provádělo kinematické řešení rovinných mechanismů trigonometrickou metodou a rovněž se začala používat metoda vektorová. Budeme se nyní zabývat kinematickou analýzou prostorových mechanismů pomocí vektorového a maticového počtu a tyto analýzy nazveme krátce vektorovou a maticovou analýzou.

4.1 Vektorová analýza

Analýza prostorových mechanismů prováděná pomocí vektorů je relativně jednoduchá, neboť klade minimální nároky na prostorovou představu, jako je tomu při použití sférické a prostorové geometrie a současně dává, a to je její velká přednost, názorný obraz řešeného problému. Použití vektorového počtu ukážeme při určování převodových funkcí prostorových a sférických mechanismů, které se vyskytují u silničních a železničních vozidel. Provedeme řešení univerzálního Hookeova kloubu v nejobecnějším tvaru s mimoběžnými osami a s mimoběžným křížem a dále vybraných sférických mechanismů.

4.1.1 Řešení univerzálního Hookeova kloubu

Hookeův kloub v obecném tvaru představuje čtyřčlenný prostorový mechanismus, obr. 63, u kterého je člen 3 tvořen mimoběžnými osami o_{32} , o_{34} a dále dvěma mimoběžnými osami o_{21} , o_{41} . Člen 3 koná obecný prostorový pohyb.

Pro dané veličiny $\omega_{21}, l, m, \delta$ chceme určit závislost $\varphi_{41} = \varphi_{41}(\varphi_{21})$, kde φ_{21} je pootočení hnacího hřídele 2 a φ_{41} pootočení hnaného hřídele 4, dále axiální posuv p hnaného, výstupního, hřídele a relativní posuvy s_1, s_2 kříže 3 vůči členům 2 a 4. Počáteční polohu mechanismu, ve které vidlice 4 leží v rovině $\sigma // \hat{yz}$, je vyznačena čárkovaně. Významné body počáteční polohy jsou A_0, B_0, C_0 , které při otočení vidlice 2 o úhel φ_{21} přejdou do bodů A, B, C v obecné poloze vyznačené plnými čarami. Vzdálenost roviny σ ve které leží osa o_{41} , která svírá se svým půdorysným průmětem úhel δ , od počátku Ω je m . Osy kříže o_{32} a o_{34} jsou vzájemně kolmé mimoběžné se střední příčkou $l = \overline{BC} = \overline{B_0C_0}$. Vstupní a výstupní hřídele s osami o_{21}, o_{41} jsou mimoběžné s příčkou m .

Posunutí bodů A_0, B_0, C_0 do nových poloh A, B, C vyjádříme pomocí polohových vektorů

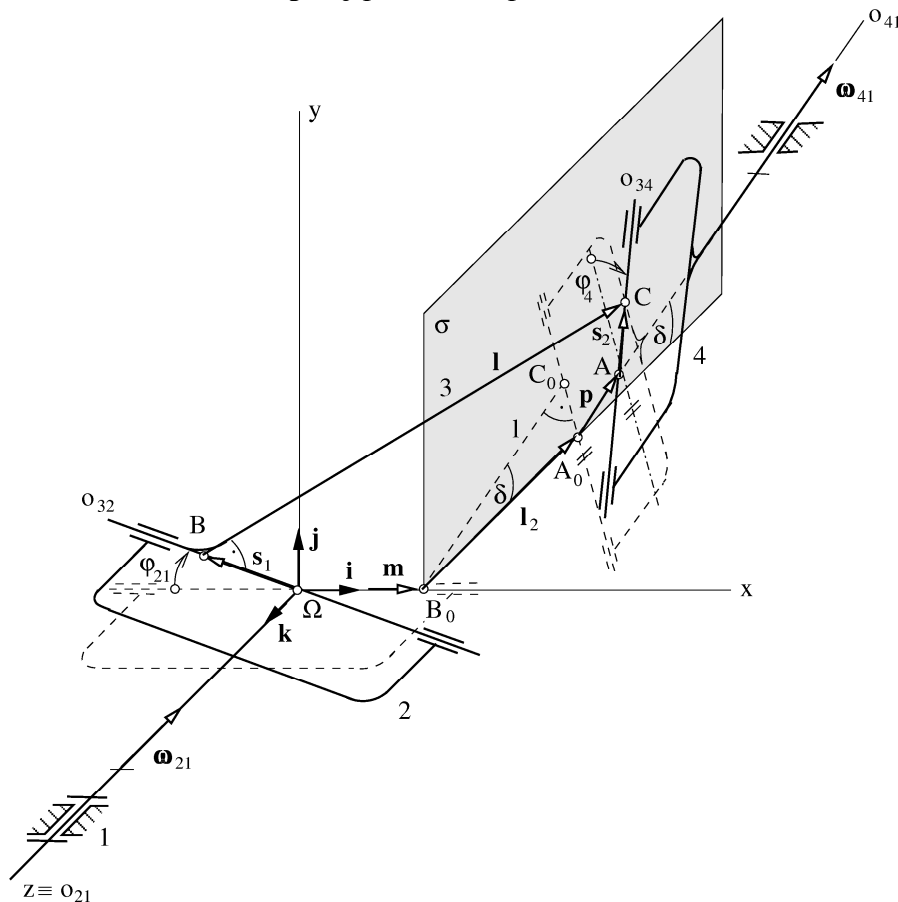
$$\mathbf{m} = \mathbf{i} m,$$

$$\mathbf{s}_1 = -\mathbf{i} s_1 \cos \varphi_{21} + \mathbf{j} s_1 \sin \varphi_{21},$$

(92)

$$\mathbf{s}_2 = -\mathbf{i} s_2 \sin \varphi_{41} + \mathbf{j} s_2 \cos \varphi_{41} \cos \delta + \mathbf{k} s_2 \cos \varphi_{41} \sin \delta,$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{j} p \sin \delta - \mathbf{k} p \cos \delta.$$



Obr. 63 Hookeův kloub

Vzdálenost bodů A_0, B_0 ve výchozí poloze je

$$\mathbf{l}_2 = -\mathbf{k} \frac{l}{\cos \delta} . \quad (93)$$

Vektor \mathbf{l} střední příčky v čase t můžeme vyjádřit vektorovým součtem dílčích vzdáleností

$$\begin{aligned} \mathbf{l} = \mathbf{m} + \mathbf{l}_2 + \mathbf{p} + \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1 = & \mathbf{i}(m + s_2 \sin \varphi_{41} + s_1 \cos \varphi_{21}) + \\ & + \mathbf{j}(p \sin \delta + s_2 \cos \varphi_{41} \cos \delta - s_1 \sin \varphi_{21}) + \mathbf{k} \left(-\frac{l}{\cos \delta} - p \cos \delta + s_2 \cos \varphi_{41} \sin \delta \right). \end{aligned} \quad (94)$$

Výrazy (92) až (94) jsme vyjádřili vektory, které v mechanismu kloubu tvoří uzavřený obrazec. Uvedené vztahy obsahují hledané neznámé φ_4, s_1, s_2, p , pro jejichž určení potřebujeme čtyři rovnice. Tři rovnice získáme z podmínek kolmosti vektorů

$$\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = 0 , \quad (95)$$

$$\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{l} = 0 , \quad (96)$$

$$\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{l} = 0 \quad (97)$$

a čtvrtou rovnici získáme ze skutečnosti, že l je příčkou os o_{32} a o_{34} , takže pro vektor \mathbf{l} můžeme psát

$$\mathbf{l} = \frac{\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2|} l . \quad (98)$$

Vektor tvořený zlomkem představuje jednotkový vektor úsečky $l = \overline{BC}$. Provedeme naznačené skalární součiny a dostaneme následující závislosti. Z rovnice $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = 0$ získáme

$$-s_1 s_2 \cos \varphi_{21} \sin \varphi_{41} + s_1 s_2 \sin \varphi_{21} \cos \varphi_{41} \cos \delta = 0 , \quad (99)$$

odkud po úpravě dostaneme

$$\operatorname{tg} \varphi_{41} = \operatorname{tg} \varphi_{21} \cos \delta . \quad (100)$$

Z rovnice $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{l} = 0$, použitím rov. (92), (94) a vydělením s_1 , dostaneme

$$-m \cos \varphi_{21} - s_2 \cos \varphi_{21} \sin \varphi_{41} + p \sin \varphi_{21} \sin \delta + s_2 \sin \varphi_{21} \cos \varphi_{41} \cos \delta - s_1 = 0 . \quad (101)$$

Po dosazení za $\cos \delta$ z rov. (100) získáme posunutí s_1

$$s_1 = -m \cos \varphi_{21} + p \sin \varphi_{21} \sin \delta . \quad (102)$$

Podobně z rovnice $\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{l} = 0$ a s využitím vztahu (98), dostaneme výraz pro posunutí s_2 ve tvaru

$$s_2 = l \operatorname{tg} \delta \cos \varphi_{41} - m \sin \varphi_{41} . \quad (103)$$

Pro určení axiálního posunutí p členu 4 upravíme nejprve výraz v rov. (98), kde využijeme, že platí $|\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2| = s_1 s_2 \sin \frac{\pi}{2} = s_1 s_2$, takže dostaneme

$$\mathbf{l} = \frac{\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2|} l = \frac{l}{s_1 s_2} \begin{vmatrix} \mathbf{i}, & \mathbf{j}, & \mathbf{k} \\ s_1 \cos \varphi_{21}, & s_1 \sin \varphi_{21}, & 0 \\ s_2 \sin \varphi_{41}, & s_2 \cos \varphi_{41} \cos \delta, & s_2 \cos \varphi_{41} \sin \delta \end{vmatrix} =$$

$$= l \begin{vmatrix} \sin \varphi_{21} \cos \varphi_{41} \sin \delta \\ \cos \varphi_{21} \cos \varphi_{41} \sin \delta \\ -\cos \varphi_{21} \cos \varphi_{41} \cos \delta - \sin \varphi_{21} \sin \varphi_{41} \end{vmatrix}.$$
(104)

Tento vektor musí být shodný s vektorem příčky z rov. (94), takže po skalárním vynásobení obou rovnic jednotkovým vektorem \mathbf{k} dostaneme

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{k}(\mathbf{m} + \mathbf{l}_2 + \mathbf{p} + \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1). \quad (105)$$

Po dosazení za jednotlivé vektory, po pronásobení a jednoduché úpravě, dostaneme axiální posunutí členu 4

$$p = \frac{1}{\cos \delta} \left[l \left(\cos \varphi_{21} \cos \varphi_{41} \cos \delta + \sin \varphi_{21} \sin \varphi_{41} - \frac{1}{\cos \delta} + \cos^2 \varphi_{41} \operatorname{tg} \delta \sin \delta \right) - \frac{m}{2} \sin 2\varphi_{41} \sin \delta \right]. \quad (106)$$

Rovnice (100), (102), (103) a (106), které určují hledané veličiny, byly sestaveny pro prostorové uspořádání Hookeova kloubu. Úpravu pro jednodušší a v reálném technickém světě častěji se vyskytující případy, provedeme velmi lehce následujícím způsobem.

Mimoběžné osy, různoběžný kříž: $l = 0, m \neq 0$

Po dosazení do uvedených rovnic dostaneme

$$\operatorname{tg} \varphi_{41} = \operatorname{tg} \varphi_{21} \cos \delta. \quad (109)$$

$$s_1 = p \sin \varphi_{21} \sin \delta - m \cos \varphi_{21}, \quad (110)$$

extrém $s_1 = \pm m$ je pro $\varphi_{21} = 0, \varphi_{21} = \frac{3}{2}\pi$.

$$s_2 = -m \sin \varphi_{41}, \quad (111)$$

extrém $s_2 = \pm m$ je pro $\varphi_{21} = \frac{\pi}{2}, \varphi_{21} = \frac{3}{2}\pi$.

$$p = -\frac{m}{2} \operatorname{tg} \delta \sin 2\varphi_{41}, \quad (112)$$

extrém $p = \pm \frac{m}{2} \operatorname{tg} \delta$ je pro $\varphi_{41} = \frac{\pi}{4}, \varphi_{41} = \frac{3}{4}\pi$.

Různoběžné osy, mimoběžný kříž: $l \neq 0, m = 0$

Stejným způsobem jako v předcházejícím odstavci dostaneme

$$\operatorname{tg} \varphi_{41} = \operatorname{tg} \varphi_{21} \cos \delta, \quad (113)$$

$$s_1 = p \sin \varphi_{21} \sin \delta, \quad (114)$$

extrém $s_1 = \pm l \operatorname{tg} \delta \left(1 - \frac{1}{\cos \delta}\right)$ je pro $\varphi_{21} = \frac{\pi}{2}, \varphi_{21} = \frac{3}{2}\pi$.

$$s_2 = l \operatorname{tg} \delta \cos \varphi_{41}, \quad (115)$$

extrém $s_2 = \pm l \operatorname{tg} \delta$ je pro $\varphi_{21} = 0, \varphi_{21} = \pi$.

$$p = \frac{l}{\cos \delta} \left(\cos \varphi_{21} \cos \varphi_{41} \cos \delta + \sin \varphi_{21} \sin \varphi_{41} - \frac{1}{\cos \delta} + \cos^2 \varphi_{41} \operatorname{tg} \delta \sin \delta \right), \quad (116)$$

extrém $p = \frac{l(\cos \delta - 1)}{\cos^2 \delta}$ je pro $\varphi_{21} = \frac{\pi}{2}, \varphi_{23} = \frac{3}{2}\pi$.

Různoběžné osy, různoběžný kříž: $l = 0, m = 0$

Po dosazení máme

$$\operatorname{tg} \varphi_{41} = \operatorname{tg} \varphi_{21} \cos \delta, \quad (117)$$

$$s_1 = s_2 = p = 0. \quad (118)$$

Uvedené vztahy pokrývají širokou škálu technických variací univerzálního Hookeova kloubu. U vozidel, kde používáme Cardanův hřídel který má na svých koncích Hookeovy klouby, musíme tyto klouby vzájemně nastavit tak, abychom na výstupním konci získali konstantní otáčky.

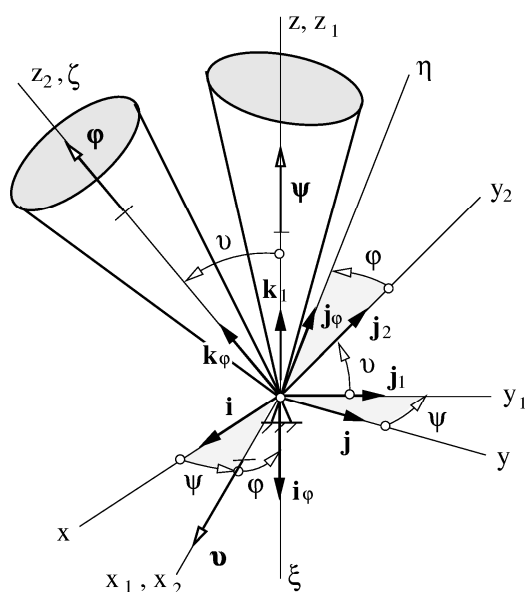
4.1.2 Řešení sférických mechanismů

Sférickými mechanismy, které jsou zvláštním a nutno dodat jednodušším případem prostorových mechanismů, rozumíme takové mechanismy, u kterých některý člen koná sférický pohyb. Připomeňme, že těleso vykonává sférický pohyb, jestliže jeden bod tělesa zůstává trvale v klidu. Sférický pohyb tělesa obvykle řešíme použitím Eulerových kinematických a dynamických rovnic, které získáme rozložením pohybu tělesa na precesi, nutaci a rotaci s následným zavedením úhlů precese ψ nutace ϑ a rotace φ , které označujeme jako Eulerovy úhly. Situace je znázorněna na obr. 61, který znázorňuje zmíněná tři otočení, kterými se souřadnicový systém $R_\varphi \equiv (\mathbf{i}_\varphi, \mathbf{j}_\varphi, \mathbf{k}_\varphi)$, pevně spojený s tělesem reprezentovaným rotačním kuželem, přemístí z výchozí polohy, ve které splývá se souřadnicovým systémem $R \equiv (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, do obecné polohy. **Prvním otočením** o úhel precese ψ kolem osy z , přejde souřadnicový systém R do systému $R_1 \equiv (\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$. **Druhým otočením** o úhel nutace ϑ kolem osy x_1 , přejde souřadnicový systém R_1 do systému $R_2 \equiv (\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2)$.

Třetím otočením kolem osy $z_2 \equiv \zeta$ o úhel rotace φ přejde souřadnicový systém R_2 do systému $R_\varphi \equiv (\mathbf{i}_\varphi, \mathbf{j}_\varphi, \mathbf{k}_\varphi)$, který určuje obecnou polohu tělesa se kterým je pevně spojen. Osa $z_2 \equiv \zeta$, která vznikla otočením osy z_1 o úhel nutace ϑ , je osou vlastní rotace tělesa. Známe-li časové derivace jednotlivých Eulerových úhlů, můžeme, podle obr. 64 vyjádřit vektor výsledné úhlové rychlosti tělesa následujícím vztahem

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} + \dot{\vartheta} + \dot{\varphi} = \begin{vmatrix} \dot{\vartheta} \cos \psi - \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi \\ \dot{\vartheta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta \end{vmatrix}. \quad (119)$$

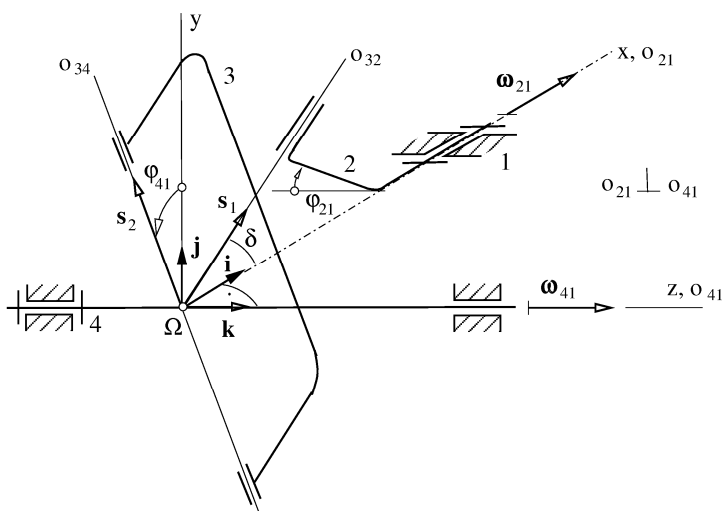
Pokud existují i druhé derivace jednotlivých rotačních pohybů, získáme vektor zrychlení derivací rov. 119. Tím se ale nyní nebudeme zabývat. Pomocí rov. (119) lze provádět kinematické řešení sférických mechanismů. Je ale možné použít k řešení jednodušší a velmi názorný způsob využitím skalárního součinu vektorů. Všimněme si rov. (95) v předcházející kapitole, která říká, že skalární součin dvou vzájemně kolmých vektorů \mathbf{s}_1 a \mathbf{s}_2 je roven nule. Využijeme této rovnice s jejíž pomocí můžeme bez použití sférické trigonometrie určit převodovou funkci sférického mechanismu, která je jedním z nejdůležitějších vztahů, neboť na jejím základě můžeme určit i pohyby jednotlivých členů. Vektory $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$, s výhodou je možné uvažovat jednotkové vektory, které musí obsahovat úhly rotace vstupního a výstupního členu, vybereme podle konstrukčního uspořádání konkrétně řešeného mechanismu. Uvedeme příklady použití u následujících vybraných mechanismů.



Obr. 64 Sfěrický pohyb tělesa a Eulerovy úhly

Příklad 6

U nakresleného mechanismu kyvné vidlice, obr. 65, převádějícího rotační pohyb členu 2 na rotačně vratný pohyb členu 4, určete převodovou funkci $\varphi_{41} = \varphi_{41}(\varphi_{21})$, jestliže je dáno $\delta, \omega_{21} = \text{konst.}$



Obr. 65 Mechanismus kyvné vidlice

V mechanismu vyznačíme navzájem kolmé vektory $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$, které jsou v souřadnicovém systému $R \equiv (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ určeny následujícími vztahy

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_1 &= \mathbf{i} s_1 \cos \delta + \mathbf{j} s_1 \sin \delta \sin \varphi_{21} - \mathbf{k} s_1 \sin \delta \cos \varphi_{21}, \\ \mathbf{s}_2 &= -\mathbf{i} s_2 \sin \varphi_{41} + \mathbf{j} s_2 \cos \varphi_{41}.\end{aligned}\quad (120)$$

Po dosazení do rov. (95) dostaneme

$$s_1 s_2 \cos \delta \sin \varphi_{41} + s_1 s_2 \sin \delta \sin \varphi_{21} \cos \varphi_{41} = 0, \quad (121)$$

odkud po úpravě získáme převodovou funkci

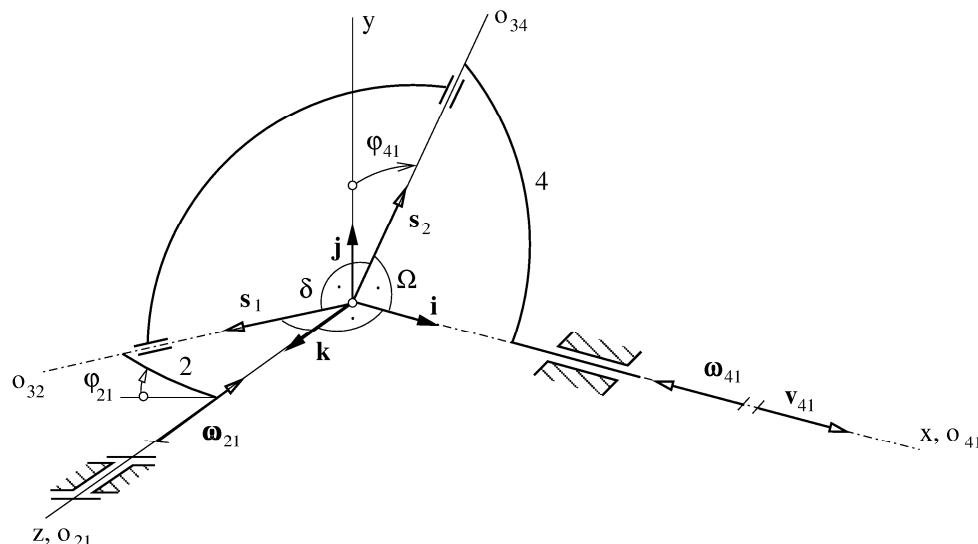
$$\operatorname{tg} \varphi_{41} = \operatorname{tg} \delta \sin \varphi_{21}. \quad (122)$$

Příklad 7

U nakresleného mechanismu převádějícího rotační pohyb členu 2 na pohyb členu 4, obr. 66, určete závislost $\varphi_4 = \varphi_4(\varphi_2)$, jestliže je dáno $\delta, \omega_{21} = \text{konst.}$

$$o_{32} \perp o_{34}$$

$$o_{34} \perp o_{41}$$



Obr. 66 Mechanismus sférického kloubu

Zavedeme opět vektory $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$, které jsou v souřadnicovém systému $R \equiv (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ určeny výrazy

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_1 &= -\mathbf{i} s_1 \sin \delta \cos \varphi_{21} + \mathbf{j} s_1 \sin \delta \sin \varphi_{21} + \mathbf{k} s_1 \cos \delta, \\ \mathbf{s}_2 &= \mathbf{j} s_2 \cos \varphi_{41} - \mathbf{k} s_2 \sin \varphi_{41}.\end{aligned}\quad (123)$$

Po dosazení do rov. (95) obdržíme vztah

$$s_1 s_2 \sin \delta \sin \varphi_{21} \cos \varphi_{41} - s_1 s_2 \cos \delta \sin \varphi_{41}, \quad (124)$$

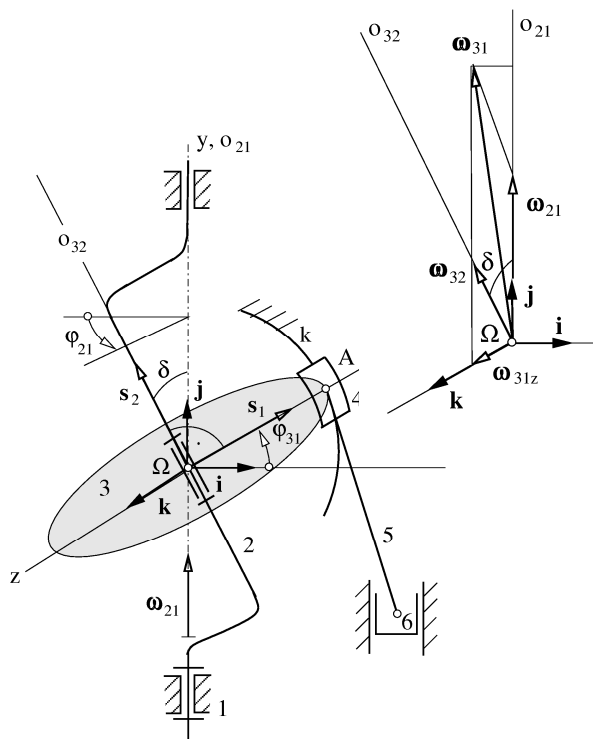
ze kterého získáme převodovou funkci

$$\operatorname{tg} \varphi_{41} = \operatorname{tg} \delta \sin \varphi_{21}. \quad (125)$$

Příklad 8

U mechanismu šikmé desky, obr. 67, přenášejícího rotační pohyb členu 2 přes pohyb desky 3 na vratný pohyb pístu 6, určete převodovou funkci $\varphi_{31} = \varphi_{31}(\varphi_{21})$, jestliže je dáno $\delta, \omega_{21} = \text{konst.}$

Šikmá deska 3, která má tvar kruhového kotouče, koná sférický pohyb kolem bodu Ω . V bodě A , který se pohybuje po kružnici k , je k desce připojena ojnice 5, která uděluje pístu 6 posuvně vratný pohyb. Písty 6, kterých je po obvodu kruhového kotouče umístěno více, buď stlačují atmosférický vzduch a jsou zdrojem tlakového vzduchu nebo tlakové kapaliny pro motor nebo pro jiné zařízení, nebo může ve válci expandovat nasátá směs a písty jsou zdrojem rotačního pohybu členu 2. Tento princip byl využíván u leteckých motorů. V pravé části obr. 67 je znázorněna okamžitá úhlová rychlost ω_{32} desky 3, která je určena vektorovým součtem úhlových rychlostí rotačních pohybů 32 a 21, takže je $\omega_{31} = \omega_{32} + \omega_{21}$. Pro pohyb bodu A je využita pouze složka úhlové rychlosti ω_{31z} .



Obr. 67 Mechanismus šikmé desky

Podobně jako u předcházejících případů vyznačíme v mechanismu vektory $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ a vyjádříme je jejich složkami v souřadnicovém systému $R \equiv (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, takže dostaneme

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{i} s_1 \cos \varphi_{31} + \mathbf{j} s_1 \sin \varphi_{31},$$

$$\mathbf{s}_2 = -\mathbf{i} s_2 \sin \delta \cos \varphi_{21} + \mathbf{j} s_2 \cos \delta + \mathbf{k} s_2 \sin \delta \sin \varphi_{21}. \quad (126)$$

Po dosazení do rov. (95) dostaneme skalární rovnici

$$-s_1 s_2 \sin \delta \cos \varphi_{21} \cos \varphi_{31} + s_1 s_2 \cos \delta \sin \varphi_{31} = 0, \quad (127)$$

odkud získáme hledanou převodovou funkci

$$\operatorname{tg} \varphi_{31} = \operatorname{tg} \delta \cos \varphi_{21}. \quad (128)$$

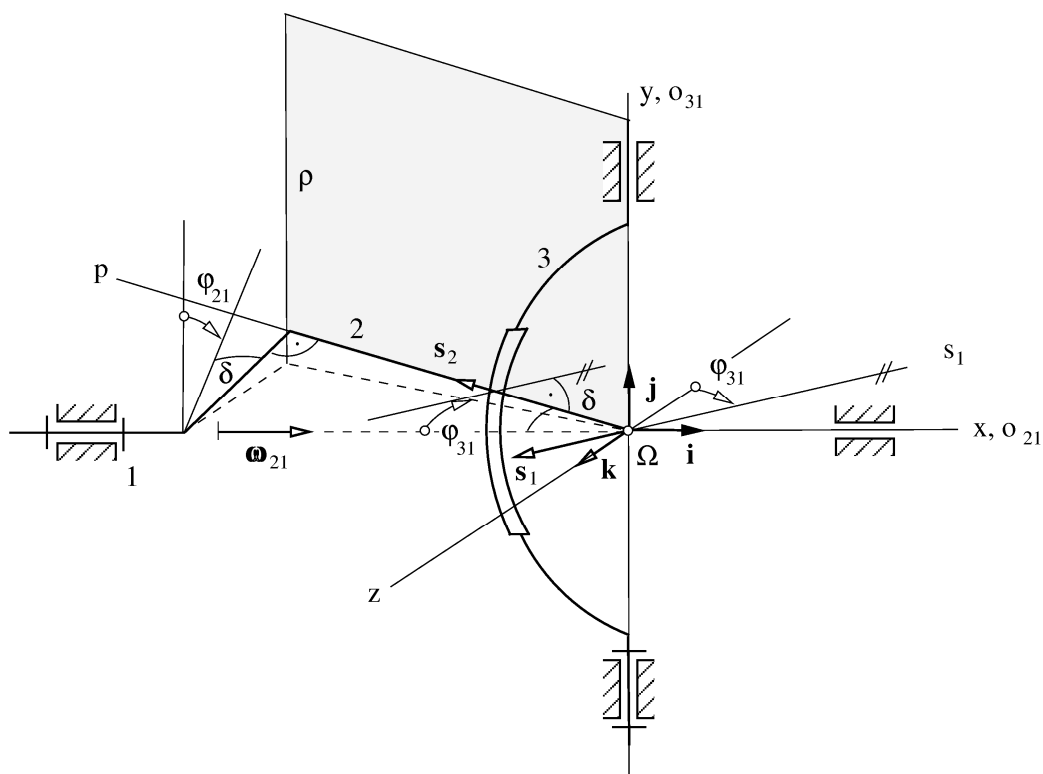
Příklad 9

U nakresleného sférického mechanismu otočné kulisy, obr. 68, určete pohyb kulisy 3, jestliže je dáno $\delta, \omega_{21} = \text{konst.}$

Kulisa vykonává rotačně vratný pohyb, který je určen převodovou funkcí $\varphi_{31} = \varphi_{31}(\varphi_{21})$. Pro její určení použijeme opět vektory \mathbf{s}_1 a \mathbf{s}_2 . Vektor \mathbf{s}_2 leží na povrchové přímce rotačního

kužele opisovaného přímkou p členu 2 a vektor \mathbf{s}_1 je kolmý na rovinu ρ proloženou přímkami p, o_{31} , takže $\mathbf{s}_1 \perp \rho \wedge \rho \equiv p, o_{31}$. Složky obou vektorů v souřadnicovém systému $R \equiv (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ jsou

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_1 &= \mathbf{i} s_1 \sin \varphi_{31} - \mathbf{k} s_1 \cos \varphi_{31}, \\ \mathbf{s}_2 &= -\mathbf{i} s_2 \cos \delta + \mathbf{j} s_2 \sin \delta \cos \varphi_{21} - \mathbf{k} s_2 \sin \delta \sin \varphi_{21}.\end{aligned}\quad (129)$$



Obr. 68 Mechanismus otočné kulisy

Stejně jako v předcházejících případech dosadíme do rov. (95) a získáme skalární rovnici

$$-s_1 s_2 \cos \delta \sin \varphi_{31} + s_1 s_2 \sin \delta \sin \varphi_{21} \cos \varphi_{31} = 0, \quad (130)$$

ze které získáme hledanou převodovou funkci

$$\operatorname{tg} \varphi_{31} = \operatorname{tg} \delta \sin \varphi_{21}. \quad (131)$$

4.2 Maticová analýza

Analýza uzavřených prostorových vázaných kinematických řetězců, které stručně nazýváme prostorové mechanismy, pomocí maticového počtu je velmi výhodná, neboť, kromě přehledného symbolického zápisu a snadného přechodu na soustavu skalárních rovnic, umožňuje provádět transformace mezi jednotlivými prostory a rychlé použití počítačových softwarů. Použití maticové symboliky k vyjádření vektorů je výhodné nejen z hlediska potřebných transformací, ale i z hlediska použití maticového počtu. Tento postup je velmi vhodný pro složitější prostorové úlohy. Podobně jako u statické analýzy budeme i zde j -tý souřadnicový systém R_j nazývat j -tým prostorem a jednotlivé vektory reperu souřadnicového

systému označíme ${}_j\mathbf{e}_i$, $i = 1 \div 3 \wedge j = 1 \div n$, kde i označuje jednotkový vektor souřadnicové báze a j označuje souřadnicový systém. Uvažujme bod L tělesa T , obr. 69, které koná v prostoru $R_2 \equiv ({}_2\mathbf{e}_1, {}_2\mathbf{e}_2, {}_2\mathbf{e}_3)$ obecný prostorový pohyb, přičemž prostor R_2 se současně pohybuje vzhledem prostoru $R_1 \equiv ({}_1\mathbf{e}_1, {}_1\mathbf{e}_2, {}_1\mathbf{e}_3)$ rovněž obecným prostorovým pohybem. Chceme vyjádřit pohybový stav bodu L , který je určen v R_2 polohovým vektorem

$${}_{R_2}\mathbf{r}_{O_2L} = \left\| {}_{R_2}x_{O_2L}, {}_{R_2}y_{O_2L}, {}_{R_2}z_{O_2L} \right\|^T, \quad \mathbf{v}$$

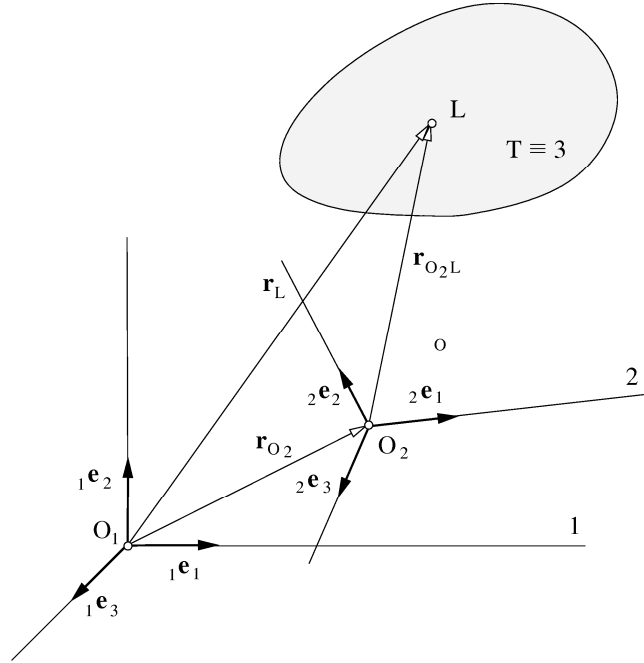
prostoru R_1 , který je základním prostorem. Polohu bodu L vyjádříme v tomto prostoru symbolickým zápisem [4] ve tvaru

$${}_{R_1}\mathbf{r}_L(t) = {}_{R_1}\mathbf{r}_{O_2}(t) + {}_{R_1}\mathbf{r}_{O_2L}(t), \quad (132)$$

kde

$${}_{R_1}\mathbf{r}_{O_2}(t) = \left\| {}_{R_1}x_{O_2}(t), {}_{R_1}y_{O_2}(t), {}_{R_1}z_{O_2}(t) \right\|^T$$

je polohový vektor počátku O_2 prostoru R_2 . V dalším postupu nebudeme pro zjednodušení zápisu, nebude-li to nezbytně nutné, uvádět čas t . Polohový vektor ${}_{R_2}\mathbf{r}_{O_2L}$ určující polohu bodu L v prostoru R_2 , přetransformujeme do prostoru R_1 vztahem



Obr. 69 Uspořádání prostorů

$${}_{R_1}\mathbf{r}_{O_2L} = \mathbf{S}_{R_2 R_1} {}_{R_2}\mathbf{r}_{O_2L}, \quad (133)$$

kde matice pootočení, nebo také jinak matice směrových kosinů je

$$\mathbf{S}_{R_2 R_1} = \begin{bmatrix} {}_1\mathbf{e}_1 \cdot {}_2\mathbf{e}_1 & {}_1\mathbf{e}_1 \cdot {}_2\mathbf{e}_2 & {}_1\mathbf{e}_1 \cdot {}_2\mathbf{e}_3 \\ {}_1\mathbf{e}_2 \cdot {}_2\mathbf{e}_1 & {}_1\mathbf{e}_2 \cdot {}_2\mathbf{e}_2 & {}_1\mathbf{e}_2 \cdot {}_2\mathbf{e}_3 \\ {}_1\mathbf{e}_3 \cdot {}_2\mathbf{e}_1 & {}_1\mathbf{e}_3 \cdot {}_2\mathbf{e}_2 & {}_1\mathbf{e}_3 \cdot {}_2\mathbf{e}_3 \end{bmatrix}, \quad (134)$$

kde ${}_j\mathbf{e}_i$, $i = 1 \div 3 \wedge j = 1, 2$ jsou, jak bylo řečeno v úvodu této kapitoly, jednotkové vektory souřadnicovýchází prostorů R_1 a R_2 . Vidíme, že matice (134) je určena skalárními součiny těchto jednotkových vektorů pro které platí, že ${}_j\mathbf{e}_i \cdot {}_k\mathbf{e}_q = \cos \alpha_{iq}$ je kosinus úhlu, který svírá osa q k -tého souřadnicového prostoru s osou i j -tého prostoru, kde $q = 1, 2, 3 \wedge i = 1, 2, 3$. Po dosazení rov. (134) do rov. (133) a následně do rov. (132) dostaneme

$${}_{R_1}\mathbf{r}_L = \begin{bmatrix} {}_{R_1}x_L \\ {}_{R_1}y_L \\ {}_{R_1}z_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{11} & \cos \alpha_{12} & \cos \alpha_{13} \\ \cos \alpha_{21} & \cos \alpha_{22} & \cos \alpha_{23} \\ \cos \alpha_{31} & \cos \alpha_{32} & \cos \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_{R_2}x_{O_2L} \\ {}_{R_2}y_{O_2L} \\ {}_{R_2}z_{O_2L} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}_{R_1}x_{O_2} \\ {}_{R_1}y_{O_2} \\ {}_{R_1}z_{O_2} \end{bmatrix}. \quad (135)$$

Pro další řešení vyjádříme [4], z důvodu kompaktního a jednoduchého zápisu transformačních vztahů, polohové vektory v rozšířených, nebo také jinak v homogenních, souřadnicích následujícím způsobem

$${}_{R_1} \mathbf{r}_L = \begin{Bmatrix} {}_{R_1} \mathbf{u}_L \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad {}_{R_2} \mathbf{r}_{O_2L} = \begin{Bmatrix} {}_{R_1} \mathbf{u}_{O_2L} \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad {}_{R_1} \mathbf{r}_{O_2} = \begin{Bmatrix} {}_{R_1} \mathbf{u}_{O_2} \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (136)$$

kde ${}_{R_1} \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} {}_{R_1} x_L, {}_{R_1} y_L, {}_{R_1} z_L \end{Bmatrix}^T$ je polohový vektor bodu L v prostoru R_1 , $\mathbf{u}_{O_2L} = \begin{Bmatrix} {}_{R_1} x_{O_2L}, {}_{R_1} y_{O_2L}, {}_{R_1} z_{O_2L} \end{Bmatrix}^T$ je polohový vektor bodu L v prostoru R_2 a konečně ${}_{R_1} \mathbf{u}_{O_2} = \begin{Bmatrix} {}_{R_1} x_{O_2}, {}_{R_1} y_{O_2}, {}_{R_1} z_{O_2} \end{Bmatrix}^T$ je polohový vektor bodu O_2 , který je počátkem prostoru R_2 v prostoru R_1 . Matice směrových kosinů $\mathbf{S}_{R_2 R_1} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha_{iq} \end{Bmatrix}$, rov. (134), je maticí ortogonální, která udává natočení prostoru R_2 vzhledem k prostoru R_1 . Nakonec zavedeme transformační matici udávající polohu prostoru R_2 vzhledem k R_1 ve tvaru

$$\mathbf{T}_{R_2 R_1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_{R_2 R_1} & {}_{R_1} \mathbf{u}_{O_2} \\ \mathbf{0} & 1 \end{Bmatrix}, \quad (137)$$

kde $\mathbf{0}$ je nulová matice. Nyní můžeme rov. (135) zapsat buď v nerozšířených souřadnicích ve tvaru

$${}_{R_1} \mathbf{u}_L = \mathbf{S}_{R_2 R_1} {}_{R_2} \mathbf{u}_{O_2L} + {}_{R_1} \mathbf{u}_{O_2}, \quad (138)$$

nebo jednodušeji a kompaktněji v rozšířených, homogenních, souřadnicích ve tvaru

$${}_{R_1} \mathbf{r}_L = \mathbf{T}_{R_2 R_1} {}_{R_2} \mathbf{r}_{O_2L}. \quad (139)$$

Při dalším řešení mohou nastat dva případy, které se odlišují postavením bodu L v prostoru R_2 . Pro jejich odlišení zavedeme nyní do zápisu opět časovou závislost.

První případ

Bod L je bodem tělesa 3 pevně spojeného s prostorem R_2 , $3 \equiv 2$, který se pohybuje v R_1 . Potom je

$${}_{R_1} \mathbf{r}_L(t) = \mathbf{T}_{R_2 R_1}(t) {}_{R_2} \mathbf{r}_{O_2L}. \quad (140)$$

Druhý případ

Bod L je bodem tělesa, které se pohybuje v prostoru R_2 , který se pohybuje v R_1 . Potom platí pro polohu bodu L vztah

$${}_{R_1} \mathbf{r}_L(t) = \mathbf{T}_{R_2 R_1}(t) {}_{R_2} \mathbf{r}_{O_2L}(t). \quad (141)$$

K uvedeným vztahům poznamenejme, že bod L nemusíme vázat na těleso a můžeme ho uvažovat jako izolovaný bod. Rov. (140) vyjadřuje pohyb bodu L tělesa 3, $L \in T \equiv 3$, pevně spojeného s prostorem R_2 , který koná obecný prostorový pohyb v prostoru R_1 . Tento pohyb můžeme použitím základního rozkladu pohybu rozložit na unášivý pohyb posuvný 21 určený pohybem bodu O_2 a na druhotný sférický pohyb 32 kolem tohoto bodu, který zapíšeme symbolickým zápisem $31 = 32 + 21$. Tento pohyb popisuje rov. (138). Rov. (141) vyjadřuje

pohyb bodu L tělesa 3 pohybujícího se v prostoru R_2 , který opět koná obecný prostorový pohyb v prostoru R_1 . Jedná se o současné pohyby tělesa 3, pro které opět platí symbolický zápis $31 = 32 + 21$, kde ale pohyby 32 a 21 jsou jiné než v předcházejícím případě, neboť představují obecné prostorové pohyby a jedná se tedy o případ podstatně složitější.

Můžeme samozřejmě postupovat i obráceně, kdy známe polohu bodu L v prostoru R_1 a chceme tuto polohu vyjádřit v prostoru R_2 . K tomu použijeme opačnou transformaci, pro kterou budeme potřebovat inverzní transformační matici, kterou získáme následujícím způsobem. Vynásobením rov. (141) zleva inverzní transformační maticí, vynecháme v zápisu opět čas, dostaneme

$$\mathbf{T}_{R_2 R_1}^{-1} {}_{R_1} \mathbf{r}_L = \underbrace{\mathbf{T}_{R_2 R_1}^{-1} \mathbf{T}_{R_2 R_1}}_{=1} {}_{R_2} \mathbf{r}_{O_2 L} \quad (142)$$

a tím získáme transformační vztah

$${}_{R_2} \mathbf{r}_{O_2 L} = \mathbf{T}_{R_2 R_1}^{-1} {}_{R_1} \mathbf{r}_L . \quad (143)$$

Součin matice původní a matice inverzní je roven jedné neboť původní matice je regulární. Tvar inverzní transformační matice určíme ze vztahu

$$\mathbf{T}_{R_2 R_1} \mathbf{T}_{R_2 R_1}^{-1} = \mathbf{I} . \quad (144)$$

kde \mathbf{I} je jednotková matice. Protože rov. (144) představuje identitu, musí mít všechny matice stejné vnitřní formální uspořádání, Upravíme-li tedy podle rov. (137) i zbývající dvě matice, můžeme rov. (144) zapsat symbolicky následovně

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{S}_{R_2 R_1} , & {}_{R_1} \mathbf{u}_{O_2} \\ \mathbf{0} , & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \mathbf{A} , & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} , & \mathbf{D} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \mathbf{I} , & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} , & 1 \end{matrix} \right\| . \quad (145)$$

Po pronásobení dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{R_2 R_1} \mathbf{A} + {}_{R_1} \mathbf{u}_{O_2} \mathbf{C} &= \mathbf{I} , \\ \mathbf{S}_{R_2 R_1} \mathbf{B} + {}_{R_1} \mathbf{u}_{O_2} \mathbf{D} &= \mathbf{0} , \\ \mathbf{0A} + 1\mathbf{C} &= \mathbf{0} , \\ \mathbf{0B} + 1\mathbf{D} &= 1 , \end{aligned} \quad (146)$$

ze které určíme hledané matice

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{0} , \\ D &= 1 , \\ \mathbf{A} &= \mathbf{S}_{R_2 R_1} , \\ \mathbf{B} &= -\mathbf{S}_{R_2 R_1} {}_{R_1} \mathbf{u}_{O_2} . \end{aligned} \quad (147)$$

Protože matice směrových kosinů $\mathbf{S}_{R_2 R_1}$ je ortogonální, platí $\mathbf{S}_{R_2 R_1}^{-1} = \mathbf{S}_{R_2 R_1}^T$. Na základě znalosti matic v rov. (147) můžeme po dosazení do druhé matice na levé straně rov. (145) určit hledanou inverzní transformační matici

$$\mathbf{T}_{R_2 R_1}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{R_2 R_1}^{-1} & -\mathbf{S}_{R_2 R_1} \mathbf{u}_{O_2} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}. \quad (148)$$

4.2.1 Rychlost bodu tělesa

Pro další výklad budeme uvažovat rov. (140), ve které ${}_{R_2} \mathbf{r}_{O_2 L}$ není funkcí času. Rychlost bodu L získáme časovou derivací rov. (140), pro tento zápis použijeme označení časové závislosti, ze které dostaneme

$${}_{R_1} \mathbf{v}_L(t) = {}_{R_1} \dot{\mathbf{r}}_L(t) = \dot{\mathbf{T}}_{R_2 R_1}(t) {}_{R_2} \mathbf{r}_{O_2 L} + \mathbf{T}_{R_2 R_1}(t) {}_{R_2} \dot{\mathbf{r}}_{O_2 L}, \quad (149)$$

kde ${}_{R_2} \dot{\mathbf{r}}_{O_2 L} = \mathbf{0}$ a ${}_{R_1} \mathbf{v}_L(t) = {}_{R_1} \dot{\mathbf{r}}_L(t) = \left\| {}_{R_1} \dot{\mathbf{u}}_L(t), 0 \right\|^T = \left\| {}_{R_1} \dot{x}_L(t), {}_{R_1} \dot{y}_L(t), {}_{R_1} \dot{z}_L(t), 0 \right\|^T$ je rozšířený vektor rychlosti bodu L zapsaný v homogenních souřadnicích prostoru R_1 . V dalších zápisech čas opět uvádět nebudeme. Derivaci transformační matice můžeme zapsat následujícím způsobem

$$\dot{\mathbf{T}}_{R_2 R_1} = \mathbf{T}_{R_2 R_1} \mathbf{V}_{R_2 R_1}, \quad (150)$$

kde matici

$$\mathbf{V}_{R_2 R_1} = \mathbf{T}_{R_2 R_1}^{-1} \dot{\mathbf{T}}_{R_2 R_1} \quad (151)$$

nazveme maticí rychlosti. Po dosazení za $\mathbf{T}_{R_2 R_1}^{-1}$ z rov. (148) a po následném derivování dostaneme

$$\mathbf{V}_{R_2 R_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{R_2 R_1}^{-1} & -\mathbf{S}_{R_2 R_1} \mathbf{u}_{O_2} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{S}}_{R_2 R_1} & {}_{R_1} \dot{\mathbf{u}}_{O_2} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{R_2 R_1}^{-1} \dot{\mathbf{S}}_{R_2 R_1} & \mathbf{S}_{R_2 R_1}^{-1} {}_{R_1} \dot{\mathbf{u}}_{O_2} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \quad (152)$$

Podobně jako v rov. (150) pro transformační matici, můžeme pro matici směrových kosinů psát

$$\dot{\mathbf{S}}_{R_2 R_1} = \mathbf{S}_{R_2 R_1} \boldsymbol{\Omega}_{R_2 R_1} \quad (153)$$

kde

$$\boldsymbol{\Omega}_{R_2 R_1} = \mathbf{S}_{R_2 R_1}^{-1} \dot{\mathbf{S}}_{R_2 R_1} \quad (154)$$

je matice úhlové rychlosti. Je to matice antisymetrická nebo také polosouměrná, protože $\boldsymbol{\Omega}_{R_2 R_1}^T = -\boldsymbol{\Omega}_{R_2 R_1}$ a singulární, neboť její hodnota je menší než její řád. Později uvidíme, rov. (173) a rov. (198), že této matici přísluší vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}_{21}$. Protože $\mathbf{S}_{R_2 R_1} \mathbf{S}_{R_2 R_1}^T = \mathbf{I}$, je matice $\mathbf{S}_{R_2 R_1}$ ortogonální a platí $\mathbf{S}_{R_2 R_1}^{-1} = \mathbf{S}_{R_2 R_1}^T$. Rov. (149) můžeme potom zapsat následovně

$${}_{R_1} \mathbf{v}_L = \mathbf{T}_{R_2 R_1} \mathbf{V}_{R_2 R_1} {}_{R_2} \mathbf{r}_{O_2 L}, \quad (155)$$

kde matice rychlosti je s použitím rov. (154)

$$\mathbf{V}_{R_2 R_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{R_2 R_1} & \mathbf{S}_{R_2 R_1}^T \dot{\mathbf{u}}_{O_2} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}. \quad (156)$$

Dosadíme-li do rov. (155) za jednotlivé matice výrazy kterými jsou určeny, tedy rov. (137), rov. (156) a vektory vyjádříme v homogenních souřadnicích, dostaneme

$$\begin{aligned} {}_{R_1} \mathbf{v}_L &= \begin{bmatrix} {}_{R_1} \dot{\mathbf{u}}_L \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{R_2 R_1} & {}_{R_1} \mathbf{u}_{O_2} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{R_2 R_1} & \mathbf{S}_{R_2 R_1}^T \dot{\mathbf{u}}_{O_2} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_{R_2} \dot{\mathbf{u}}_{O_2 L} \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{R_2 R_1} \boldsymbol{\Omega}_{R_2 R_1} & \mathbf{S}_{R_2 R_1} \mathbf{S}_{R_2 R_1}^T \dot{\mathbf{u}}_{O_2} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_{R_2} \dot{\mathbf{u}}_{O_2 L} \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{R_2 R_1} \boldsymbol{\Omega}_{R_2 R_1} {}_{R_2} \mathbf{u}_{O_2 L} + \mathbf{S}_{R_2 R_1} \mathbf{S}_{R_2 R_1}^T \dot{\mathbf{u}}_{O_2} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (157)$$

Po přepsání do homogenních souřadnic dostaneme pro rychlost bodu L tělesa spojeného s prostorem R_2 , $L \in T \equiv 3$ v prostoru R_1 vztah

$${}_{R_1} \dot{\mathbf{u}}_L = \mathbf{S}_{R_2 R_1} \boldsymbol{\Omega}_{R_2 R_1} {}_{R_2} \mathbf{u}_{O_2 L} + {}_{R_1} \dot{\mathbf{u}}_{O_2}, \quad (158)$$

kde ${}_{R_1} \dot{\mathbf{u}}_{O_2}$ je rychlost počátku O_2 souřadnicového systému R_2 v R_1 .

4.2.2 Zrychlení bodu tělesa

Rovnicí (149) je určena rychlost bodu L . Časovou derivaci této rovnice, použijeme opět označené časové funkce, získáme vztah pro zrychlení bodu

$${}_{R_1} \mathbf{a}_L(t) = {}_{R_1} \dot{\mathbf{v}}_L(t) = \ddot{\mathbf{T}}_{R_2 R_1}(t) {}_{R_2} \mathbf{r}_{O_2 L} + \dot{\mathbf{T}}_{R_2 R_1}(t) {}_{R_2} \dot{\mathbf{r}}_{O_2 L}, \quad (159)$$

kde opět ${}_{R_2} \dot{\mathbf{r}}_{O_2 L} = \mathbf{0}$ a ${}_{R_1} \mathbf{a}_L(t) = \begin{bmatrix} {}_{R_1} \ddot{\mathbf{u}}_L, 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} {}_{R_1} \ddot{x}_L(t), {}_{R_1} \ddot{y}_L(t), {}_{R_1} \ddot{z}_L(t), 0 \end{bmatrix}^T$ je rozšířený vektor zrychlení vyjádřený v homogenních souřadnicích prostoru R_1 . Derivací rov. (150) získáme

$$\ddot{\mathbf{T}}_{R_2 R_1} = \dot{\mathbf{T}}_{R_2 R_1} \mathbf{V}_{R_2 R_1} + \mathbf{T}_{R_2 R_1} \dot{\mathbf{V}}_{R_2 R_1}. \quad (160)$$

Označíme-li matici $\dot{\mathbf{V}}_{R_2 R_1} = \mathbf{A}_{R_2 R_1}$ jako matici zrychlení a matici $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{R_2 R_1} = \mathfrak{V}_{R_2 R_1}$ jako matici úhlového zrychlení, můžeme rov. (160) upravit s použitím rov. (150) na následující tvar

$$\ddot{\mathbf{T}}_{R_2 R_1} = \mathbf{T}_{R_2 R_1} \mathbf{V}_{R_2 R_1} \mathbf{V}_{R_2 R_1} + \mathbf{T}_{R_2 R_1} \mathbf{A}_{R_2 R_1} = \mathbf{T}_{R_2 R_1} (\mathbf{V}_{R_2 R_1}^2 + \mathbf{A}_{R_2 R_1}), \quad (161)$$

kde matice zrychlení je určena derivací rov. (156)

$$\mathbf{A}_{R_2 R_1} = \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{R_2 R_1} & \dot{\mathbf{S}}_{R_2 R_1}^T \dot{\mathbf{u}}_{O_2} + \mathbf{S}_{R_2 R_1}^T \ddot{\mathbf{u}}_{O_2} \\ \mathbf{0} & 0 \end{Bmatrix}. \quad (162)$$

Potom můžeme po dosazení do rov. (159) vyjádřit zrychlení bodu L , již opět bez označení časové závislosti, výrazem

$${}_{R_1} \mathbf{a}_L = \mathbf{T}_{R_2 R_1} (\mathbf{V}_{R_2 R_1}^2 + \mathbf{A}_{R_2 R_1}) {}_{R_1} \mathbf{r}_{O_2 L}, \quad (163)$$

kde ještě potřebujeme vyjádřit matici zrychlení a kvadrát matice rychlosti. Pro úpravu matice zrychlení určíme nejdříve derivaci $\mathbf{S}_{R_2 R_1}^T$ tak, že použijeme rov. (154), ve které nahradíme $\mathbf{S}_{R_2 R_1}^{-1} = \mathbf{S}_{R_2 R_1}^T$ a dostaneme

$$\boldsymbol{\Omega}_{R_2 R_1} = \mathbf{S}_{R_2 R_1}^T \dot{\mathbf{S}}_{R_2 R_1}. \quad (164)$$

Po transpozici dostaneme rovnici

$$\boldsymbol{\Omega}_{R_2 R_1}^T = \dot{\mathbf{S}}_{R_2 R_1}^T \mathbf{S}_{R_2 R_1}, \quad (165)$$

kterou vynásobíme zprava maticí $\mathbf{S}_{R_2 R_1}^T$ a dostaneme

$$\boldsymbol{\Omega}_{R_2 R_1}^T \mathbf{S}_{R_2 R_1}^T = \dot{\mathbf{S}}_{R_2 R_1}^T \underbrace{\mathbf{S}_{R_2 R_1} \mathbf{S}_{R_2 R_1}^T}_{\mathbf{I}} = \dot{\mathbf{S}}_{R_2 R_1}^T. \quad (166)$$

Po dosazení do rov. (162), s tím, že $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{R_2 R_1} = \mathfrak{Z}_{R_2 R_1}$ je, podle poznámky u rov. (160), matice úhlového zrychlení, dostaneme matici zrychlení ve tvaru

$$\mathbf{A}_{R_2 R_1} = \begin{Bmatrix} \mathfrak{Z}_{R_2 R_1} & \boldsymbol{\Omega}_{R_2 R_1}^T \mathbf{S}_{R_2 R_1}^T \dot{\mathbf{u}}_{O_2} + \mathbf{S}_{R_2 R_1}^T \ddot{\mathbf{u}}_{O_2} \\ \mathbf{0} & 0 \end{Bmatrix}. \quad (167)$$

Pro vyjádření kvadrátu matice rychlosti použijeme rov. (156), podle které můžeme psát

$$\mathbf{V}_{R_2 R_1}^2 = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{R_2 R_1} & \mathbf{S}_{R_2 R_1}^T \dot{\mathbf{u}}_{O_2} \\ \mathbf{0} & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{R_2 R_1} & \mathbf{S}_{R_2 R_1}^T \dot{\mathbf{u}}_{O_2} \\ \mathbf{0} & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{R_2 R_1}^2 & \boldsymbol{\Omega}_{R_2 R_1} \mathbf{S}_{R_2 R_1}^T \dot{\mathbf{u}}_{O_2} \\ \mathbf{0} & 0 \end{Bmatrix}. \quad (168)$$

S použitím rov. (167) a (168) vyjádříme součet matic v závorce v rov. (163), s tím, že podle poznámky u rov. (154) je $\boldsymbol{\Omega}_{R_2 R_1}^T = -\boldsymbol{\Omega}_{R_2 R_1}$ a dostaneme [4] úplnou matici zrychlení ve tvaru

$$\tilde{\mathbf{A}}_{R_2 R_1} = \left\| \begin{array}{c} \mathbf{\Omega}_{R_2 R_1}^2 + \mathfrak{T}_{R_2 R_1} , \quad \mathbf{\Omega}_{R_2 R_1} \mathbf{S}_{R_2 R_1}^T \mathbf{\dot{u}}_{O_2} - \mathbf{\Omega}_{R_2 R_1} \mathbf{S}_{R_2 R_1}^T \mathbf{\dot{u}}_{O_2} + \mathbf{S}_{R_2 R_1}^T \mathbf{\ddot{u}}_{O_2} \\ \mathbf{0} , \quad \mathbf{0} \end{array} \right\| = \quad (169)$$

$$= \left\| \begin{array}{c} \mathbf{\Omega}_{R_2 R_1}^2 + \mathfrak{T}_{R_2 R_1} , \quad \mathbf{S}_{R_2 R_1}^T \mathbf{\ddot{u}}_{O_2} \\ \mathbf{0} , \quad \mathbf{0} \end{array} \right\|.$$

Rov. (163) můžeme potom použitím úplné matice zrychlení zapsat zkráceně

$${}_{R_1} \mathbf{a}_L = \mathbf{T}_{R_2 R_1} \tilde{\mathbf{A}}_{R_2 R_1} {}_{R_2} \mathbf{r}_{O_2 L} \quad (170)$$

a po provedeném násobení dostaneme pro zrychlení konečný výraz

$$\begin{aligned} {}_{R_1} \mathbf{a}_L &= \left\| \begin{array}{c} \mathbf{S}_{R_2 R_1} , \quad {}_{R_1} \mathbf{u}_{O_2} \\ \mathbf{0} , \quad 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \mathbf{\Omega}_{R_2 R_1}^2 + \mathfrak{T}_{R_2 R_1} , \quad \mathbf{S}_{R_2 R_1}^T \mathbf{\ddot{u}}_{O_2} \\ \mathbf{0} , \quad \mathbf{0} \end{array} \right\| {}_{R_2} \mathbf{r}_{O_2 L} = \\ &= \left\| \begin{array}{c} \mathbf{S}_{R_2 R_1} (\mathbf{\Omega}_{R_2 R_1}^2 + \mathfrak{T}_{R_2 R_1}) , \quad \underbrace{\mathbf{S}_{R_2 R_1} \mathbf{S}_{R_2 R_1}^T \mathbf{\ddot{u}}_{O_2}}_{\mathbf{I}} \\ \mathbf{0} , \quad \mathbf{0} \end{array} \right\| {}_{R_2} \mathbf{r}_{O_2 L} = \\ &= \left\| \begin{array}{c} \mathbf{S}_{R_2 R_1} (\mathbf{\Omega}_{R_2 R_1}^2 + \mathfrak{T}_{R_2 R_1}) , \quad {}_{R_1} \mathbf{\ddot{u}}_{O_2} \\ \mathbf{0} , \quad \mathbf{0} \end{array} \right\| {}_{R_2} \mathbf{r}_{O_2 L} . \end{aligned} \quad (171)$$

Vektor zrychlení v rov. (171) je vyjádřen v rozšířených, homogenních, souřadnicích ${}_{R_1} \mathbf{a}_L = \left\| {}_{R_1} \mathbf{\ddot{u}}_L , 0 \right\|^T$. Rov. (171) má v nerozšířených souřadnicích tvar

$${}_{R_1} \mathbf{\ddot{u}}_L = \mathbf{S}_{R_2 R_1} (\mathbf{\Omega}_{R_2 R_1}^2 + \mathfrak{T}_{R_2 R_1}) {}_{R_2} \mathbf{r}_{O_2 L} + {}_{R_1} \mathbf{\ddot{u}}_{O_2} . \quad (172)$$

Rov. (172) a (158) vyjadřují vektory zrychlení a rychlostí bodu L tělesa T spojeného s prostorem R_2 , který se pohybuje v prostoru R_1 vyjádřené v nerozšířených souřadnicích prostoru R_1 . Rozšíření uvedených vztahů na libovolný počet prostorů je formálně jednoduché, neboť stačí vytvořit další analogické transformační vztahy a začlenit je do stávajících rovnic.

U rov. (154) jsme uvedli, že matici úhlové rychlosti $\mathbf{\Omega}_{R_2 R_1} = \mathbf{\Omega}_{21}$ přísluší vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}_{21}$. Totéž platí i pro matici úhlového zrychlení $\mathfrak{T}_{R_2 R_1} = \mathfrak{T}_{21}$, které přísluší vektor zrychlení $\boldsymbol{\alpha}_{21}$. Těmto maticím můžeme přiřadit vektory úhlových rychlostí a úhlového zrychlení následujícím způsobem

$$\mathbf{\Omega}_{21} = \left\| \begin{array}{ccc} 0 , & -\omega_{21z} , & \omega_{21y} \\ \omega_{21z} , & 0 , & -\omega_{21x} \\ -\omega_{21y} , & \omega_{21x} , & 0 \end{array} \right\| , \text{ kde } \boldsymbol{\omega}_{21} = \left\| \begin{array}{c} \omega_{21x} \\ \omega_{21y} \\ \omega_{21z} \end{array} \right\| , \quad (173)$$

$$\mathfrak{S}_{21} = \begin{Bmatrix} 0, & -\alpha_{21z}, & \alpha_{21y} \\ \alpha_{21z}, & 0, & -\alpha_{21x} \\ -\alpha_{21y}, & \alpha_{21x}, & 0 \end{Bmatrix}, \text{ kde } \mathbf{a}_{21} = \begin{Bmatrix} \alpha_{21x} \\ \alpha_{21y} \\ \alpha_{21z} \end{Bmatrix}, \quad (174)$$

neboť stačí pronásobit rovnici $\mathbf{\Omega}_{21} \mathbf{r} = \mathbf{\omega}_{21} \times \mathbf{r}$, podobně i pro zrychlení a získáme složky vektorů $\mathbf{\omega}$, \mathbf{a} v maticích úhlové rychlosti a úhlového zrychlení.

V dalším výkladu uvedeme několik případů použití vyložené teorie. Jedná se o jednoduché případy, které bychom mohli velmi dobře řešit méně náročným postupem, avšak pro aplikaci vyložené teorie jsou vhodné.

Příklad 10

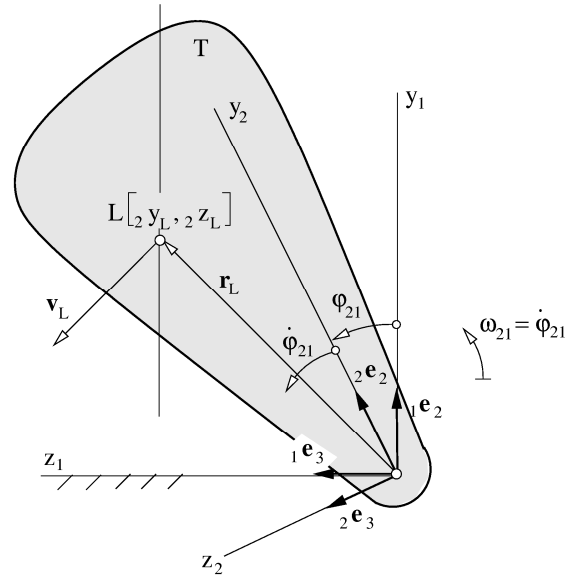
Určete rychlost bodu L tělesa T rotujícího kolem osy x_1 konstantní úhlovou rychlostí ω , obr. 67, jestliže je dána poloha bodu $L [0, {}_{R_2}y_L, {}_{R_2}z_L]$ a úhlová rychlost $\omega_{21} = \text{konst.}$

Zavedeme základní nehybný prostor R_1 , ve kterém chceme rychlost určit a prostor R_2 , který spojíme s tělesem T . Oba prostory mají společný počátek Ω . Poloha bodu $L \in T$ v prostoru $R_2 \equiv ({}_2\mathbf{c}_1, {}_2\mathbf{c}_2, {}_2\mathbf{c}_3)$, rotujícího kolem osy $x_2 \equiv x_1$, je určena jeho souřadnicemi, takže s použitím homogenních souřadnic můžeme psát

$${}_{R_2} \mathbf{r}_L = \begin{Bmatrix} {}_{R_2} \mathbf{u}_L, 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0, {}_{R_2}y_L, {}_{R_2}z_L, 1 \end{Bmatrix}^T, \quad (175)$$

kde ${}_{R_2}y_L, {}_{R_2}z_L$ jsou dané hodnoty, které pro zjednodušení zápisu přeznačíme v dalším výkladu na ${}_2y_L, {}_2z_L$. Pro řešení si připravíme potřebné matice. Matice směrových kosinů má podle rov. (134) tvar

$$\mathbf{S}_{R_2 R_1} = \begin{Bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \cos \varphi_{21}, & -\sin \varphi_{21} \\ 0, & \sin \varphi_{21}, & \cos \varphi_{21} \end{Bmatrix}. \quad (176)$$



Obr. 70 Rotace tělesa T

Pro transformační matici podle rov. (137) platí

$$\mathbf{T}_{R_2 R_1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_{R_2 R_1}, & {}_{R_1} \mathbf{u}_{O_2} \\ \mathbf{0}, & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1, & 0, & 0, & | & 0 \\ 0, & \cos \varphi_{21}, & -\sin \varphi_{21}, & | & 0 \\ 0, & \sin \varphi_{21}, & \cos \varphi_{21}, & | & 0 \\ \hline 0, & 0, & 0, & | & 1 \end{Bmatrix}. \quad (177)$$

Matice úhlové rychlosti je podle rov. (154)

$$\mathbf{\Omega}_{R_2 R_1} = \mathbf{S}_{R_2 R_1}^T \dot{\mathbf{S}}_{R_2 R_1} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \cos \varphi_{21}, & \sin \varphi_{21} \\ 0, & \sin \varphi_{21}, & \cos \varphi_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & -\sin \varphi_{21}, & -\cos \varphi_{21} \\ 0, & \cos \varphi_{21}, & -\sin \varphi_{21} \end{bmatrix} \dot{\varphi}_{21} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_{21} . \quad (178)$$

Nyní můžeme podle rov. (156) určit matici rychlosti. V našem případě je polohový vektor ${}_{R_1} \mathbf{u}_{O_2} = \mathbf{0}$ a proto dostaneme

$$\mathbf{V}_{R_2 R_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}_{R_2 R_1}, & \mathbf{S}_{R_2 R_1}^T {}_{R_1} \mathbf{u}_{O_2} \\ \mathbf{0}, & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_{21} = \mathbf{D}_{(\varphi_{21})} \dot{\varphi}_{21} , \quad (179)$$

kde matici $\mathbf{D}_{(\varphi_{21})}$ nazveme [4] maticovým diferenciálním operátorem, který určuje rotační pohyb kolem osy $x_1 \equiv x_2$. Zavedení matice \mathbf{D} usnadňuje výpočty, neboť umožňuje formálně nahradit složitou strukturu hypermatice s derivací jednoduchou čtvercovou maticí. Rychlost bodu $L \in T$ prostoru R_2 vzhledem k prostoru R_1 můžeme podle rov. (155) vyjádřit následujícím vztahem

$${}_{R_1} \mathbf{v}_L = \mathbf{T}_{R_2 R_1} \mathbf{V}_{R_2 R_1} {}_{R_2} \mathbf{r}_{O_2 L} = \mathbf{T}_{R_2 R_1} \mathbf{D}_{(\varphi_{21})} \dot{\varphi}_{21} {}_{R_2} \mathbf{r}_{O_2 L} . \quad (180)$$

Po dosazení za jednotlivé matice dostaneme

$${}_{R_1} \mathbf{v}_L = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \cos \varphi_{21}, & -\sin \varphi_{21}, & 0 \\ 0, & \sin \varphi_{21}, & \cos \varphi_{21}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_{21} \begin{bmatrix} 0 \\ {}_{R_2} y_L \\ {}_{R_2} z_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -{}_{R_2} y_L \sin \varphi_{21} - {}_{R_2} z_L \cos \varphi_{21} \\ {}_{R_2} y_L \cos \varphi_{21} - {}_{R_2} z_L \sin \varphi_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_{21} . \quad (181)$$

Pro $\varphi_{21} = 0$ je

$${}_{R_1} \mathbf{v}_L = \begin{bmatrix} 0 \\ -{}_{R_2} z_L \dot{\varphi}_{21} \\ {}_{R_2} y_L \dot{\varphi}_{21} \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (182)$$

Protože se jedná o jednoduchý případ rotace, je ověření výsledku podle obr. 70 ihned zřejmé.

Příklad 11

Určete rychlost bodu L ramena robotu [4], jestliže je dáno $r, h(t), \varphi(t), \vartheta(t), x(t)$.

Situace je znázorněna na obr. 71, který zachycuje bod L ramena 4 v obecné poloze. Pro zlepšení přehlednosti je v obrázku vyznačena pouze báze jednotkových vektorů základního nehybného prostoru R_1 . Rameno 4 má tři stupně volnosti. Kromě základního prostoru R_1 zavedeme další pomocné prostory R_2, R'_2, R_3, R_4 . Polohový vektor bodu L vyjádřený v maticovém tvaru v prostoru R_1 je

$${}_{R_1} \mathbf{r}_L = \mathbf{T}_{R_2 R_1} \mathbf{T}_{R'_2 R_2} \mathbf{T}_{R_3 R'_2} \mathbf{T}_{R_4 R_3} {}_{R_4} \mathbf{r}_L = \mathbf{T}_{R_4 R_1} {}_{R_4} \mathbf{r}_L . \quad (183)$$

Pro další postup musíme určit polohový vektor vodu L a jednotlivé transformační matice. Polohový vektor vyjádřený v prostoru R_4 v homogenních souřadnicích má tvar

$${}_{R_4} \mathbf{r}_L = [r, 0, 0, 1]^T . \quad (184)$$

Matice směrových kosinů rotačních pohybů 43 a 21 jsou

$$\mathbf{S}_{R_4 R_3}(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & 0 & \sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_{R_2 R_1}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (185)$$

a jim příslušné transformační matice mají tvar

$$\mathbf{T}_{R_4 R_3} = \left\| \begin{array}{ccc|c} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| ,$$

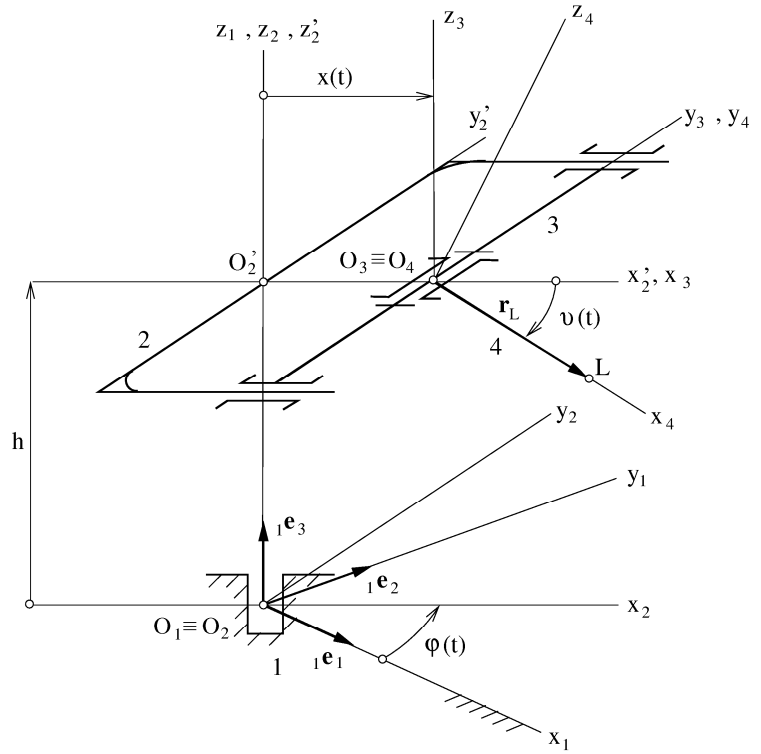
$$\mathbf{T}_{R_2 R_1} = \left\| \begin{array}{ccc|c} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| . \quad (186)$$

Matice směrových kosinů $\mathbf{S}_{R_3 R'_2}$ a $\mathbf{S}_{R'_2 R_2}$ posuvných pohybů 32' a 2'2 jsou jednotkové, takže můžeme psát

$$\mathbf{S}_{R_3 R'_2} \equiv \mathbf{S}_{R'_2 R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (187)$$

a příslušné transformační matice jsou

$$\mathbf{T}_{R_3 R'_2} = \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|, \quad \mathbf{T}_{R'_2 R_2} = \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| . \quad (188)$$



Obr. 71 Rameno robotu

Celková transformační matice $\mathbf{T}_{R_4 R_1}$ je podle rov. (183) určena součinem dílčích transformačních matic. Postupným násobením dostaneme

$$\mathbf{T}_{R_4 R_1} = \left\| \begin{array}{c|c} \mathbf{S}_{R_4 R_1} & \begin{matrix} x \cos \varphi \\ x \sin \varphi \\ h \end{matrix} \\ \hline 0, 0, 0, & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc|c} \cos \varphi \cos \vartheta, & -\sin \varphi, & \cos \varphi \sin \vartheta, & x \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \vartheta, & \cos \varphi, & \sin \varphi \sin \vartheta, & x \sin \varphi \\ -\sin \vartheta, & 0, & \cos \vartheta, & h \\ \hline 0, & 0, & 0, & 1 \end{array} \right\|, \quad (189)$$

kde $\mathbf{S}_{R_4 R_1}$ je celková matice směrových kosinů, kterou můžeme také získat součinem dílčích matic $\mathbf{S}_{R_4 R_1} = \mathbf{S}_{R_2 R_1} \mathbf{S}_{R_2' R_2} \mathbf{S}_{R_3 R_2'} \mathbf{S}_{R_4 R_3}$. Dosazením rov. (189) do rov. (183) dostaneme polohový vektor bodu L vyjádřený v základním prostoru R_1 v homogenních souřadnicích

$${}_{R_1} \mathbf{r}_L = \left\| \begin{array}{c} {}_{R_1} x_L \\ {}_{R_1} y_L \\ {}_{R_1} z_L \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} (x + r \cos \vartheta) \cos \varphi \\ (x + r \cos \vartheta) \sin \varphi \\ h - r \sin \vartheta \\ 1 \end{array} \right\|. \quad (190)$$

Rychlost bodu L můžeme určit buď přímou derivací rov. (190) nebo použitím matice rychlosti $\mathbf{V}_{R_4 R_1}$ uvedené v rov. (156).

Výpočet přímou derivací

Derivací rov. (190) dostaneme

$${}_{R_1} \mathbf{v}_L = {}_{R_1} \dot{\mathbf{r}}_L = \left\| \begin{array}{c} {}_{R_1} v_{Lx} \\ {}_{R_1} v_{Ly} \\ {}_{R_1} v_{Lz} \\ 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} (\dot{x} - r \dot{\vartheta} \sin \vartheta) \cos \varphi - (x + r \cos \vartheta) \sin \varphi \dot{\varphi} \\ (\dot{x} - r \dot{\vartheta} \sin \vartheta) \sin \varphi + (x + r \cos \vartheta) \cos \varphi \dot{\varphi} \\ -r \cos \vartheta \dot{\vartheta} \\ 0 \end{array} \right\|. \quad (191)$$

Výpočet pomocí matice rychlosti

Rychlost bodu L je určena rov. (155), kterou pro náš řešený příklad přeznačíme, tím, že pro zjednodušení zavedeme podle obr. 71 $\mathbf{r}_{O_4 L} = \mathbf{r}_L$ na tvar

$${}_{R_1} \mathbf{v}_L = \mathbf{T}_{R_4 R_1} \mathbf{V}_{R_4 R_1} {}_{R_4} \mathbf{r}_L, \quad (192)$$

kde matice rychlosti, rov. (156), je

$$\mathbf{V}_{R_4 R_1} = \left\| \begin{array}{c|c} \boldsymbol{\Omega}_{R_4 R_1} & \mathbf{S}_{R_4 R_1}^T {}_{R_1} \dot{\mathbf{u}}_{O_4} \\ \hline \mathbf{0}, & 0, \end{array} \right\| \wedge \boldsymbol{\Omega}_{R_4 R_1} = \mathbf{S}_{R_4 R_1}^{-1} \dot{\mathbf{S}}_{R_4 R_1}. \quad (193)$$

Po provedení derivace a transpozice matice směrových kosinů z rov. (189), nezapomeňme, že $\mathbf{S}_{R_4 R_1}^{-1} = \mathbf{S}_{R_4 R_1}^T$, dostaneme

$$\mathbf{S}_{R_4 R_1}^T = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta, & \sin \varphi \cos \vartheta, & -\sin \vartheta \\ -\sin \varphi, & \cos \varphi, & 0 \\ \cos \varphi \sin \vartheta, & \sin \varphi \sin \vartheta, & \cos \vartheta \end{vmatrix}. \quad (194)$$

$$\dot{\mathbf{S}}_{R_4 R_1} = \begin{vmatrix} -\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \vartheta - \dot{\vartheta} \cos \varphi \sin \vartheta, & -\dot{\varphi} \cos \varphi, & -\dot{\varphi} \sin \varphi \sin \vartheta + \dot{\vartheta} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \dot{\varphi} \cos \varphi \cos \vartheta - \dot{\vartheta} \sin \varphi \sin \vartheta, & -\dot{\varphi} \sin \varphi, & \dot{\varphi} \cos \varphi \sin \vartheta + \dot{\vartheta} \sin \varphi \cos \vartheta \\ -\dot{\vartheta} \cos \vartheta, & 0, & -\dot{\vartheta} \sin \vartheta \end{vmatrix}. \quad (195)$$

Po dosazení do druhého výrazu na pravé straně v rov. (193), můžeme vyjádřit, viz rov. (154), matici úhlové rychlosti

$$\mathbf{\Omega}_{R_4 R_1} = \begin{vmatrix} 0, & -\dot{\varphi} \cos \vartheta, & \dot{\vartheta} \\ \dot{\varphi} \cos \vartheta, & 0, & \dot{\varphi} \sin \vartheta \\ -\dot{\vartheta}, & -\dot{\varphi} \sin \vartheta, & 0 \end{vmatrix}. \quad (196)$$

Vidíme, že matice úhlové rychlosti $\mathbf{\Omega}_{R_4 R_1}$ je podle poznámky u rov. (154) skutečně maticí antisymetrickou. Pro vyjádření součinu transponované matice směrových kosinů a derivace nerozšířeného polohového vektoru počátku O_4 , který je

$${}_{R_1} \mathbf{u}_{O_4} = \mathbf{S}_{R_2 R_1} {}_{R_2} \mathbf{u}_{O_4} = \mathbf{S}_{R_2 R_1} \|x, 0, h\|^T = \|x \cos \varphi, x \sin \varphi, h\|^T, \quad (197)$$

určíme nejdříve derivaci polohového vektoru

$${}_{R_1} \dot{\mathbf{u}}_{O_4} = \begin{vmatrix} \dot{x} \cos \varphi - x \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{x} \sin \varphi + x \dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (198)$$

Potom po pronásobení rov. (194) a (198) dostaneme

$$\mathbf{S}_{R_4 R_1}^T {}_{R_1} \dot{\mathbf{u}}_{O_4} = \begin{vmatrix} \dot{x} \cos \varphi \\ x \dot{\varphi} \\ \dot{x} \sin \vartheta \end{vmatrix}. \quad (199)$$

Konkrétní tvar matice rychlosti dostaneme po dosazení do rov. (193)

$$\mathbf{V}_{R_4 R_1} = \begin{vmatrix} 0, & -\dot{\varphi} \cos \vartheta, & \dot{\vartheta}, & \dot{x} \cos \vartheta \\ \dot{\varphi} \cos \vartheta, & 0, & \dot{\varphi} \sin \vartheta, & x \dot{\varphi} \\ -\dot{\vartheta}, & -\dot{\varphi} \sin \vartheta, & 0, & \dot{x} \sin \vartheta \\ \hline 0, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}. \quad (200)$$

Nyní můžeme dosadit do rov. (192) a po postupném pronásobení matic dostaneme nejdříve dílčí součin

$$\mathbf{V}_{R_4 R_1 R_4} \dot{\mathbf{u}}_L = \begin{pmatrix} \dot{x} \cos \vartheta \\ r \dot{\varphi} \cos \vartheta + x \dot{\varphi} \\ -r \dot{\vartheta} + \dot{x} \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (201)$$

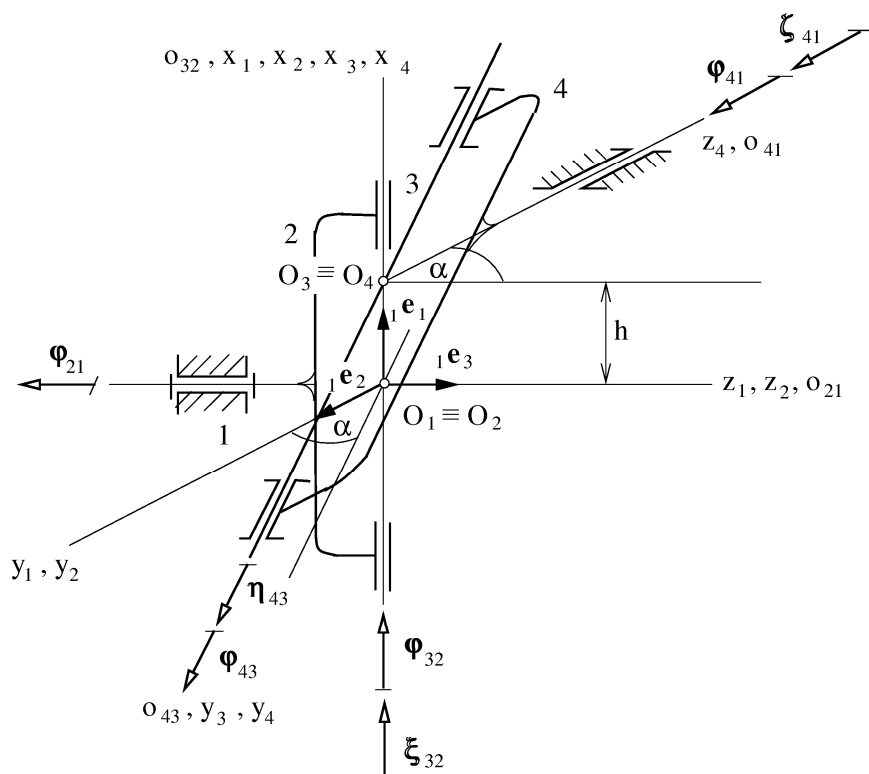
kde vektor ${}_{R_4} \mathbf{r}_L$ je určen rov. (184) a posléze celkovou maticí vektoru rychlosti v homogenních souřadnicích

$${}_{R_1} \mathbf{v}_L = \mathbf{T}_{R_4 R_1} \mathbf{V}_{R_4 R_1 R_4} \mathbf{r}_L = \begin{pmatrix} (\dot{x} - r \dot{\vartheta} \sin \vartheta) \cos \varphi - (x + r \cos \vartheta) \sin \varphi \dot{\varphi} \\ (\dot{x} - r \dot{\vartheta} \sin \vartheta) \sin \varphi + (x + r \cos \vartheta) \cos \varphi \dot{\varphi} \\ -r \cos \vartheta \dot{\vartheta} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (202)$$

kterou je určena rychlost bodu L . Porovnáním s rov. (191) vidíme shodu obou výrazů.

Příklad 12

Určete pohyby členů univerzálního Hookeova kloubu [4] v závislosti na poloze hnacího členu 2, je-li dáno $h, \alpha, \omega_{21} = \text{konst.}$



Obr. 72 Hookeův kloub

Řešení Hookeova kloubu, který je znázorněn na obr. 72, jsme již provedli pomocí vektorové analýzy a nyní ukážeme postup při použití maticové analýzy. Uvažujeme podle obr. 72 kloub s mimoběžnými osami o_{21}, o_{41} a s různoběžným křížem s osami o_{32}, o_{43} ve výchozí poloze, která je na obrázku vyznačena. Při přemístění kříže tvořeného členem 3, dojde k následujícím pohybům. Člen 2 se otočí o úhel φ_{21} , člen 3 se vzhledem ke členu 2

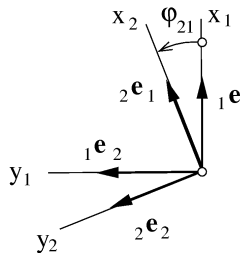
otočí o úhel φ_{32} a posune o délku ξ_{32} a rovněž vzhledem ke členu 4 se otočí o úhel φ_{43} a posune o délku η_{43} a člen 4 se otočí a posune o míry φ_{41} a ζ_{41} . Situace je znázorněna na obrázku. Použitím rozkladu pohybu pro člen 4 ve tvaru $41 = 43 + 32 + 21$ získáme následující maticovou rovnici mechanismu tvořenou transformačními maticemi

$$\mathbf{T}_{41} = \mathbf{T}_{21} \mathbf{T}_{32} \mathbf{T}_{43} \quad (203)$$

Jednoduchý postup řešení spočívá v tom, že rovnice pro nás představuje identitu, takže matice na obou stranách rovnice vyjádříme samostatně a jejich vzájemným porovnáním získáme skalární rovnice pro určení veličin popisujících pohyby jednotlivých členů.

Pohyb 21

Pohybem 21 je rotace 2 kolem osy o_{21} , kterou vyjádříme transformační maticí

$$\mathbf{T}_{21}(\varphi_{21}) = \left\| \begin{array}{ccc|c} \cos\varphi_{21} & -\sin\varphi_{21} & 0 & 0 \\ \sin\varphi_{21} & \cos\varphi_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|, \quad (204)$$


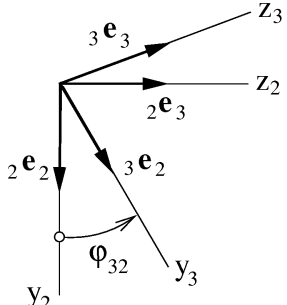
kde submatice vyznačená čárkovně je matice směrových kosinů získaná podle schematického obrázku vpravo u rov. (204).

Pohyb 32

Pohyb 32 je složen z rotace φ_{32} členu 3 kolem osy o_{32} a z posuvu ξ_{32} podél této osy. Vyjádříme ho proto součinem dvou dílčích transformačních matic, připomeneme si, že na pořadí matic při násobení nezáleží

$$\mathbf{T}_{32}(\xi_{32}, \varphi_{32}) = \mathbf{T}_{32P}(\xi_{32}) \mathbf{T}_{32R}(\varphi_{32}), \quad (205)$$

kde index P označuje posuv a index R rotaci. Po sestavení dílčích transformačních matic, čárkovně jsou opět vyznačeny matice směrových kosinů, dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{32}(\xi_{32}, \varphi_{32}) &= \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \xi_{32} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_{32} & -\sin\varphi_{32} & 0 \\ 0 & \sin\varphi_{32} & \cos\varphi_{32} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \xi_{32} \\ 0 & \cos\varphi_{32} & -\sin\varphi_{32} & 0 \\ 0 & \sin\varphi_{32} & \cos\varphi_{32} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|, \end{aligned} \quad (206)$$


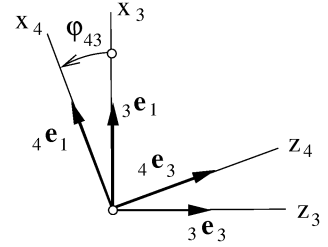
kde opět submatice směrových kosinů určující rotaci φ_{32} je určena na základě schematického obrázku u rov. (206).

Pohyb 43

Pohyb 43 je opět složen z rotace φ_{43} členu 4 kolem osy o_{43} a z posuvu η_{43} podél této osy. Podobně jako v předcházejícím případě vyjádříme tento pohyb součinem transformačních matic

$$\mathbf{T}_{43}(\eta_{43}, \varphi_{43}) = \mathbf{T}_{43P}(\eta_{43}) \mathbf{T}_{43R}(\varphi_{43}), \quad (207)$$

kde indexy P, R mají stejný význam jako v rov. (205). Po sestavení dílčích matic a jejich násobení dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{43}(\eta_{43}, \varphi_{43}) &= \left\| \begin{array}{ccc|c} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & \eta_{43} \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ \hline 0, & 0, & 0, & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccc|c} \cos \varphi_{43}, & 0, & \sin \varphi_{43}, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ -\sin \varphi_{43}, & 0, & \cos \varphi_{43}, & 0 \\ \hline 0, & 0, & 0, & 1 \end{array} \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{ccc|c} \cos \varphi_{43}, & 0, & \sin \varphi_{43}, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & \eta_{43} \\ -\sin \varphi_{43}, & 0, & \cos \varphi_{43}, & 0 \\ \hline 0, & 0, & 0, & 1 \end{array} \right\| \end{aligned} \quad (208)$$


Submatice směrových kosinů, neboli submatice pootočení je opět určena podle schematického obrázku u rov. (208).

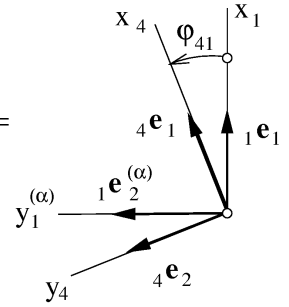
Určili jsme transformační matice dílčích pohybů na pravé straně rov. (203) a můžeme přistoupit k určení transformační matice na levé straně.

Pohyb 41

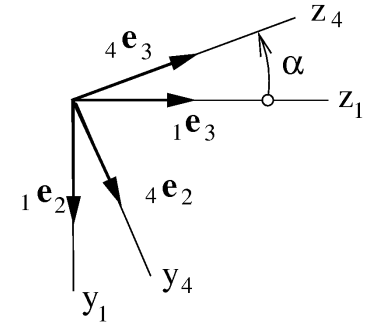
Pohyb 41 je složen z rotace φ_{41} členu 4 kolem osy o_{41} a z posunutí ζ_{41} podél této osy. Člen 4 se nejprve ze základního prostoru R_1 posune a natočí o předepsané míry h, α do své výchozí polohy, ze které se přemístí do obecné polohy zmíněnou rotací φ_{41} a posunutím ζ_{41} . Přemístění členu 4 ze základní do obecné můžeme vyjádřit součinem jednotlivých transformačních matic

$$\mathbf{T}_{41}(h, \alpha, \zeta_{41}, \varphi_{41}) = \mathbf{T}_{41P}(h) \mathbf{T}_{41R}(\alpha) \mathbf{T}_{41P}(\zeta_{41}) \mathbf{T}_{41R}(\varphi_{41}), \quad (209)$$

kde symbolika značení je stejná jako v předchozích rovnicích. Sestavíme jednotlivé matice a provedeme dílčí součiny

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{41P}(\zeta_{41}) \mathbf{T}_{41R}(\varphi_{41}) &= \left\| \begin{array}{ccc|c} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & \zeta_{41} \\ \hline 0, & 0, & 0, & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccc|c} \cos \varphi_{41}, & -\sin \varphi_{41}, & 0, & 0 \\ \sin \varphi_{41}, & \cos \varphi_{41}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ \hline 0, & 0, & 0, & 1 \end{array} \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{ccc|c} \cos \varphi_{41}, & -\sin \varphi_{41}, & 0, & 0 \\ \sin \varphi_{41}, & \cos \varphi_{41}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & \zeta_{41} \\ \hline 0, & 0, & 0, & 1 \end{array} \right\|, \end{aligned} \quad (210)$$


kde $y_1^{(\alpha)}$ na schematickém obrázku vpravo u rov. (210) představuje souřadnicovou osu y_1 otočenou kolem osy x_1 o úhel α . To samé platí i pro jednotkový vektor ${}_1\mathbf{e}_2^{(\alpha)}$. Další dílčí součin tvoří první dvě matice na pravé straně rov. (209).

$$\mathbf{T}_{41P}(h) \mathbf{T}_{41R}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & h \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (211)$$


kde submatice směrových kosinů je opět určena podle schematického obrázku. Pronásobením rov. (210) a (211) dostaneme výslednou transformační matici \mathbf{T}_{41} , která má následující tvar

$$\mathbf{T}_{41} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{41} & -\sin \varphi_{41} & 0 & h \\ \cos \alpha \sin \varphi_{41} & \cos \alpha \cos \varphi_{41} & -\sin \alpha & -\zeta_{41} \sin \alpha \\ \sin \alpha \sin \varphi_{41} & \sin \alpha \cos \varphi_{41} & \cos \alpha & \zeta_{41} \cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (212)$$

Po provedení součinů na pravé straně rov. (203) dostaneme

$$\mathbf{T}_{41} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{21} \cos \varphi_{43} - \sin \varphi_{21} \sin \varphi_{32} \sin \varphi_{43} & -\sin \varphi_{21} \cos \varphi_{32} & \cos \varphi_{21} \sin \varphi_{43} + \sin \varphi_{21} \sin \varphi_{32} \cos \varphi_{43} & \xi_{32} \cos \varphi_{21} - \eta_{43} \sin \varphi_{21} \cos \varphi_{32} \\ \sin \varphi_{21} \cos \varphi_{43} + \cos \varphi_{21} \sin \varphi_{32} \sin \varphi_{43} & \cos \varphi_{21} \cos \varphi_{32} & \sin \varphi_{21} \sin \varphi_{43} - \cos \varphi_{21} \sin \varphi_{32} \cos \varphi_{43} & \xi_{32} \sin \varphi_{21} + \eta_{43} \cos \varphi_{21} \cos \varphi_{32} \\ -\cos \varphi_{32} \sin \varphi_{43} & \sin \varphi_{32} & \cos \varphi_{32} \cos \varphi_{43} & -\eta_{43} \sin \varphi_{32} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (213)$$

Porovnáním jednotlivých členů matic v rov. (212) a (213) získáme následujících dvanáct transcendentních rovnic

$$\cos \varphi_{41} = \cos \varphi_{21} \cos \varphi_{43} - \sin \varphi_{21} \sin \varphi_{32} \sin \varphi_{43}, \quad (a)$$

$$\sin \varphi_{41} = \sin \varphi_{21} \cos \varphi_{32}, \quad (b)$$

$$0 = \cos \varphi_{21} \sin \varphi_{43} + \sin \varphi_{21} \sin \varphi_{32} \cos \varphi_{43}, \quad (c)$$

$$\cos \alpha \sin \varphi_{41} = \sin \varphi_{21} \cos \varphi_{43} + \cos \varphi_{21} \sin \varphi_{32} \sin \varphi_{43}, \quad (d)$$

$$\cos \alpha \cos \varphi_{41} = \cos \varphi_{21} \cos \varphi_{32}, \quad (e)$$

$$-\sin \alpha = \sin \varphi_{21} \sin \varphi_{43} - \cos \varphi_{21} \sin \varphi_{32} \cos \varphi_{43} , \quad (f)$$

$$\sin \alpha \sin \varphi_{41} = -\cos \varphi_{32} \sin \varphi_{43} , \quad (g)$$

$$\sin \alpha \cos \varphi_{41} = \sin \varphi_{32} , \quad (h)$$

$$\cos \alpha = \cos \varphi_{32} \cos \varphi_{43} , \quad (ch)$$

$$h = \xi_{32} \cos \varphi_{21} - \eta_{43} \sin \varphi_{21} \cos \varphi_{32} , \quad (i)$$

$$-\zeta_{41} \sin \alpha = \xi_{32} \sin \varphi_{21} + \eta_{43} \cos \varphi_{21} \cos \varphi_{32} , \quad (j)$$

$$\zeta_{41} \cos \alpha = -\eta_{42} \sin \varphi_{32} , \quad (k)$$

$$(214)$$

pro šest neznámých φ_{32} , ξ_{32} , φ_{43} , η_{43} , φ_{41} , ζ_{41} při daném úhlu natočení φ_{21} členu 2. Prvních devět rovnic v soustavě (214) náleží submatici směrových kosinů \mathbf{S}_{41} , transformační matice \mathbf{T}_{41} , která reprezentuje tři otočení. Proto pouze tři z nich jsou nezávislé.

Z rovnic (b) a (e) dostaneme

$$\operatorname{tg} \varphi_{41} = \operatorname{tg} \varphi_{21} \cos \alpha , \quad (215)$$

z rovnic (e a (h) máme

$$\operatorname{tg} \varphi_{32} = \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_{21} , \quad (216)$$

a posléze z rovnic (g) a (h) získáme

$$\sin \varphi_{43} = -\operatorname{tg} \varphi_{41} \operatorname{tg} \varphi_{32} = -\sin \varphi_{21} \sin \alpha . \quad (217)$$

Tím jsme získali natočení jednotlivých členů. Po dosazení za úhly pootočení do rov. (i), (j), (k) získáme posuvy ξ_{32} , η_{43} , ζ_{41} jednotlivých členů i jejich extrémní hodnoty. Prostorový pohyb vnitřního členu 3, který tvoří kříž Hookeova kloubu, popisuje transformační rovnice

$$\mathbf{T}_{31} = \mathbf{T}_{21} \mathbf{T}_{32} . \quad (218)$$

Po dosazení za dílčí transformační matice na pravé straně z rovnic (204) a (205) a po provedeném součinu, dostaneme matici vyjadřující pohyb 31 v následujícím tvaru

$$\mathbf{T}_{31} = \left\| \begin{array}{ccc|c} \cos \varphi_{21} , & -\sin \varphi_{21} \cos \varphi_{32} , & \sin \varphi_{21} \sin \varphi_{32} , & \xi_{32} \cos \varphi_{21} \\ \sin \varphi_{21} , & \cos \varphi_{21} \cos \varphi_{32} , & -\cos \varphi_{21} \sin \varphi_{32} , & \xi_{32} \sin \varphi_{21} \\ 0 , & \sin \varphi_{32} , & \cos \varphi_{32} , & 0 \\ \hline 0 , & 0 , & 0 , & 1 \end{array} \right\| , \quad (219)$$

kde poslední sloupec představuje souřadnice středu kříže v rovině $x_2 y_2$, obr. 72, která je součástí prostoru R_2 spojeného se členem 2. Stejně jako u vektorové analýzy, je možné i zde řešit speciální případy, které mají v technické praxi větší využití.