



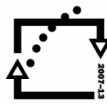
evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt CZ.1.07/2.2.00/15.0383
Inovace studijního oboru Dopravní a manipulační technika
s ohledem na potřeby trhu práce

Mechanika vozidel

Část 3

Učební text k předmětu
KME/MV Mechanika vozidel

doc.Ing.Jaromír Švígler, CSc.

2013

3. STATICKÁ ANALÝZA VOZIDLOVÝCH MECHANISMŮ

Statickou analýzu vozidlových mechanismů provádíme stejně jako řešení soustav vázaných těles, které bylo probíráno v základním kursu mechaniky, tedy uvolňováním jednotlivých členů soustavy. Podle typu a složitosti řešené úlohy můžeme k řešení použít vektorový způsob, který je vhodný pro méně náročné prostorové úlohy, nebo způsob maticový, který je vhodný pro řešení složitějších prostorových mechanismů s využitím počítačové podpory. Ukážeme si stručně oba způsoby, ale více se zaměříme na řešení s využitím matic. V dalším budeme hovořit o vektorové a o maticové analýze.

Z našich úvah vyloučíme princip virtuálních prací, daný vztahem $\delta A = \sum \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$, kde $\delta \mathbf{r}_i$ je virtuální dosunutí, který vyjadřuje rovnováhu aktivních silových účinků \mathbf{F}_i působících na soustavu s holonomními (integrovatelnými) vazbami. Tato metoda je při řešení prostorových úloh náročná na vyjádření potřebných geometrických závislostí a navíc neumožňuje určení reakčních sil ve vazbách.

3.1 Vektorová analýza

Zaměříme se na těleso uložené v prostoru, případně na prostorové soustavy, neboť řešení rovinných soustav bylo již prováděno v základní výuce mechaniky. Pro rovnováhu tělesa v prostoru musí opět platit podmínka rovnováhy akčních (F_A, M_A) a reakčních F_R, M_R silových účinků, kterou tvoří dvě vektorové rovnice

$$\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_R = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_A + \mathbf{M}_R = \mathbf{0}, \quad (57)$$

které po rozepsání vytvoří soustavu šesti skalárních rovnic. Protože princip a postup řešení byl již zmiňován v předcházející výuce při hledání rovnovážné polohy tělesa, bude situace nejlépe patrná z uvedených příkladů.

Příklad 1

Určete reakce působící na tuhou nehmotnou hnací nápravu automobilu, obr. 58, zatíženou tíhovými silami karoserie a kroutícím momentem, jestliže je dáno $S_1, S_2, F_A, F_R, F_0, a, b, c, r, r_s$. Hledáme R_A, R_B, N_1, N_2, T .

Řešení tohoto jednoduchého případu provedeme za předpokladu, že na obou kolech působí stejná tečná síla T . Reakce působící na nápravu jsou $R_{A_x}, R_{A_z}, R_{B_x}, R_{B_y}, R_{B_z}, T$. Nápravu a kola uvažujeme jako nehmotná tělesa a proto platí $R_{A_z} = N_1, R_{B_z} = N_2$. Pro přesnější výpočet by bylo nutné provést její uvolnění od kol a uvažovat hmotu nápravy a hmoty kol.

Jedná se o prostorovou soustavu sil, pro kterou píšeme ve zvoleném souřadnicovém systému $R \equiv (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ tři složkové a tři momentové podmínky rovnováhy

$$\sum F_x = 0: \quad R_{A_x} + R_{B_x} - 2T - F_0 = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_A - R_{B_y} = 0,$$

$$\sum F_z = 0: \quad R_{A_z} + R_{B_z} - S_1 - S_2 - F_R = 0,$$

[illegible]
$$\sum M_z = 0: \quad M_K - Sl = 0, \quad S = \frac{M_K}{l} = 11\,516\,N,$$

$$\sum M_x = 0: M_H + M_2 - R_{B_y} e - Sd = 0, \quad R_{B_y} = \frac{-Sd + M_H + M_2}{e} = 22\,316 \text{ N},$$

$$\sum M'_x = 0: \quad M_H + M_2 - R_{A_y} e - S(d + e) = 0, \quad R_{A_y} = \frac{S(d + e) - M_H - M_2}{e} \doteq -10\,800 \text{ N},$$

$$\sum M_y = 0: R_{B_y} \cdot e = 0, \quad R_{B_x} = 0,$$

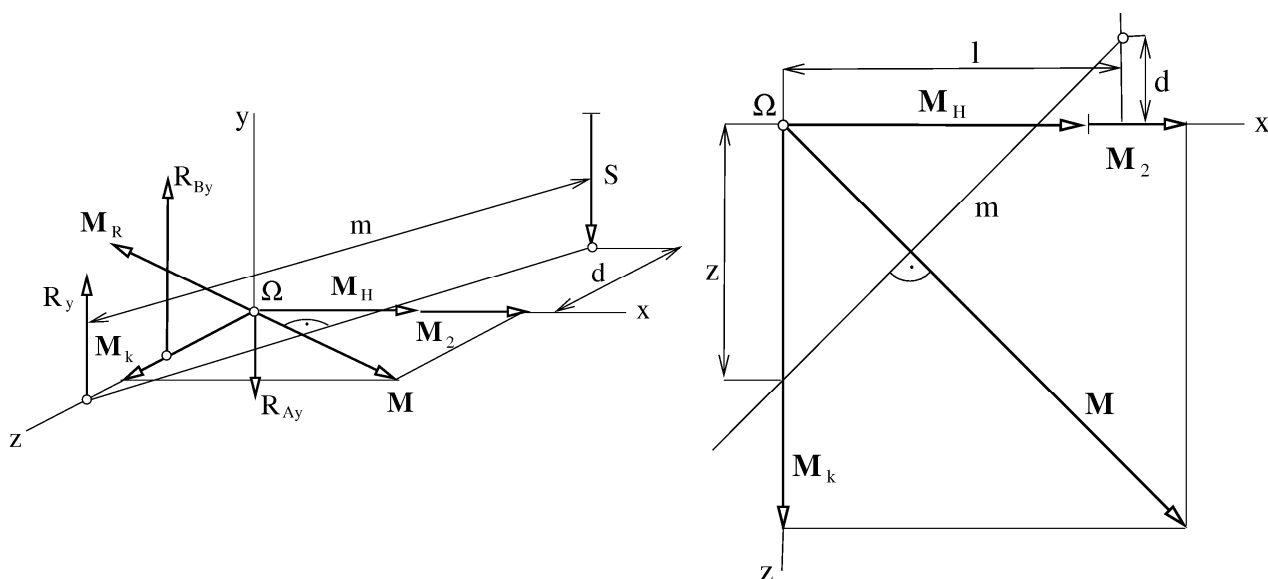
$$\sum M'_y = 0: R_{A_x} \cdot e = 0, \quad R_{A_x} = 0,$$

$$\sum F_z = 0: \quad R_{A_z} = 0, \quad R_{A_z} = 0. \quad (59)$$

$$R_y = R_{B_v} + R_{A_v} = 22\,316 - 11\,516 = 11\,516\,N \quad (60)$$

59

$$R_y \cdot z = R_{By} \cdot e \Rightarrow z = \frac{R_{By} \cdot e}{R_y} = 102 \text{ cm} \quad (61)$$



Obr. 55 Grafické znázornění silových účinků

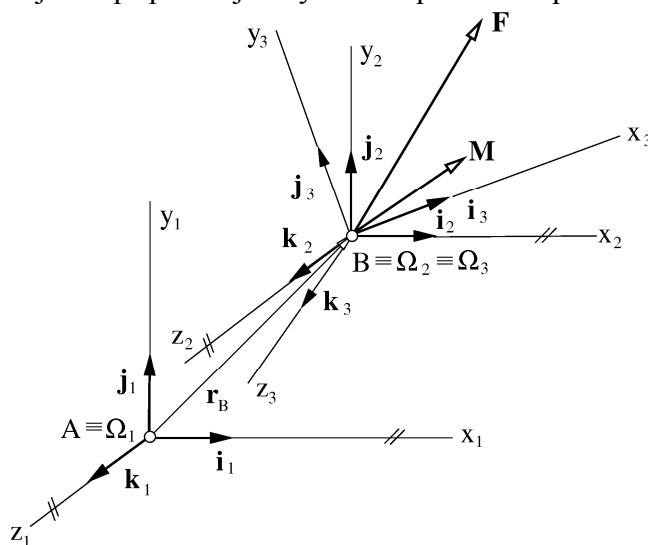
Vidíme, že reakce R_y a S tvoří silovou dvojici. Situace je graficky znázorněna na obr. 55 jak prostorově, tak i v rovině xz . Podle obrázku můžeme psát

$$|\mathbf{M}| = \sqrt{M_K^2 + (M_H + M_2)^2}, \quad |\mathbf{M}_R| = R_y m$$

Protože jsme řešili rovnováhu jenom převodové skříně, byly reakce R_{Ax} a R_{Bx} nulové. Tyto reakce získáme řešením statické rovnováhy dvojkolí. Ze statického hlediska demonstruje uvedený příklad rovnováhu dvojicových momentů.

3.2 Maticová analýza

Vyjádřování silových účinků u složitějších případů je výhodné provádět použitím maticového počtu. Necht' náhrada prostorové soustavy sil definované v prostoru R_3 v bodě $B \equiv \Omega_2 \equiv \Omega_3$ je \mathbf{F}, \mathbf{M} . Chceme vyjádřit tyto silové účinky v prostoru R_1 . K řešení použijeme pomocný prostor R_2 , který vznikl paralelním posunutím, obr. 56, prostoru R_1 . V následujících vztazích budeme vektory síly \mathbf{F} a momentu \mathbf{M} zapisovat ve tvaru matic. Dále bude platit, že zápisem $_{R_i} \mathbf{F}$, $i = 1, 2$ je rozuměn vektor \mathbf{F} vyjádřený v souřadnicové soustavě



Obr. 56 Uspořádání prostorů

R_i , kterou budeme někdy jednoduše nazývat prostorem R_i . Sílu F a dvojicový moment M můžeme vyjádřit v prostoru R_2 pomocí transformačního vztahu

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix}_{R_2} = \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_{R_3 R_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{R_3 R_2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix}_{R_3}, \quad (63)$$

kde

$$\mathbf{F}_{R_3} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{R_3} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}, \quad (64)$$

jsou matice silových účinků a matice směrových kosinů při transformaci z prostoru R_3 do R_2 je

$$\mathbf{S}_{R_3 R_2}(\psi) = \mathbf{S}_{R_3 R_2} = \begin{Bmatrix} \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_3 & \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_3 & \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_3 \\ \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{i}_3 & \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_3 & \mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_3 \\ \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_3 & \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_3 & \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3 \end{Bmatrix}. \quad (65)$$

Je to matice ortogonální a platí pro ní

$$\mathbf{S}_{R_3 R_2} = \mathbf{S}_{R_2 R_3}^{-1} = \mathbf{S}_{R_2 R_3}^T. \quad (66)$$

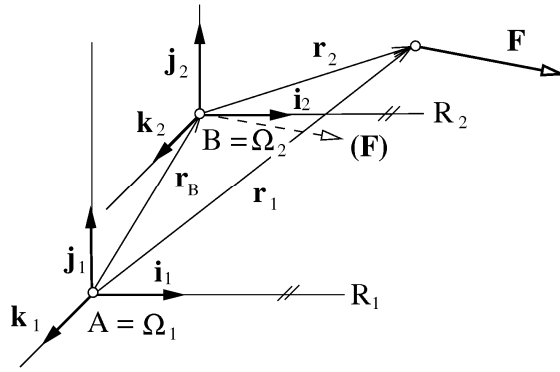
Z uvedených vztahů je patrné, že se jedná o transformaci mezi pootočenými souřadnicovými systémy. Známe nyní silové účinky v prostoru R_2 a provedeme jejich vyjádření v prostoru R_1 nebo jinak řečeno provedeme transformaci z prostoru R_2 do prostoru R_1 . Prostory R_2 a R_1 jsou vzájemně posunuty. To znamená, že síla F se nezmění, neboť se jedná o první vektorový invariant prostorové soustavy sil, ale změní se moment M . Pro silové účinky vyjádřené v R_1 platí transformační vztah

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix}_{R_1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{R_2 R_1} & \mathbf{I} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix}_{R_2}, \quad (67)$$

kde \mathbf{I} je jednotková matice a $\mathbf{R}_{R_2 R_1}$ je matice, která vyjadřuje posunutí síly \mathbf{F} a kterou určíme následujícím způsobem. Uvažujme nyní, že \mathbf{F} je libovolná síla ležící v prostoru R_2 , obr. 57. Moment síly F k bodu A , podle poznámky platí $_{R_1} \mathbf{F} = _{R_2} \mathbf{F} = \mathbf{F}$, můžeme, obr. 57, vyjádřit buď přímo pomocí polohového vektoru \mathbf{r}_1 nebo, v případě, že síla F leží obecně v prostoru R_2 zprostředkovaně pomocí vektorů \mathbf{r}_B a \mathbf{r}_2 následujícím způsobem

$$_{R_1} \mathbf{M}_A = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_B + \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F} = \underbrace{\mathbf{r}_B \times \mathbf{F}}_{_{R_1} \mathbf{M}_{BA}} + \underbrace{\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}}_{_{R_2} \mathbf{M}_B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ x_B & y_B & z_B \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} + _{R_2} \mathbf{M}_B. \quad (68)$$

kde M_B je moment síly F k bodu B v prostoru R_2 a M_{BA} je moment síly F , posunutý do bodu B , k bodu A . Rov. (68) má po rozepsání determinantu tvar



Obr. 57 Moment síly F k bodu A

$${}_{R_1}\mathbf{M}_A = \begin{bmatrix} y_B F_z - z_B F_y \\ -x_B F_z + z_B F_x \\ x_B F_y - y_B F_x \end{bmatrix} + {}_{R_2}\mathbf{M}_B = \begin{bmatrix} 0 & -z_B & y_B \\ z_B & 0 & -x_B \\ -y_B & x_B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} + {}_{R_2}\mathbf{M}_B. \quad (69)$$

Rov. (69) můžeme vyjádřit v maticové symbolice následujícím způsobem

$${}_{R_1}\mathbf{M}_A = \mathbf{R}_{R_2 R_1} {}_{R_2}\mathbf{F} + {}_{R_2}\mathbf{M}_B, \quad (70)$$

kde $\mathbf{R}_{R_2 R_1}$ je matice vyjadřující paralelní posunutí síly, jejíž konkrétní tvar je

$$\mathbf{R}_{R_2 R_1} = \begin{bmatrix} 0 & -z_B & y_B \\ z_B & 0 & -x_B \\ -y_B & x_B & 0 \end{bmatrix}. \quad (71)$$

Vyznačení prostoru R_2 u vektoru \mathbf{F} je formální, neboť, jak jsme řekli, síla je vzhledem k prostorům R_2 a R_1 invariantní. Dosazením rov. (63) do rov. (67) dostaneme transformační vztah mezi silovými účinky v prostoru R_3 a R_1 .

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}_{R_1}\mathbf{F} \\ {}_{R_1}\mathbf{M} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{R_2 R_1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_{R_3}\mathbf{F} \\ {}_{R_3}\mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \mathbf{S}_{R_3 R_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{R_2 R_1} \mathbf{S}_{R_3 R_2} & \mathbf{I} \mathbf{S}_{R_3 R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_{R_3}\mathbf{F} \\ {}_{R_3}\mathbf{M} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{R_3 R_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{R_2 R_1} \mathbf{S}_{R_3 R_2} & \mathbf{S}_{R_3 R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_{R_3}\mathbf{F} \\ {}_{R_3}\mathbf{M} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (72)$$

Stručně můžeme tento výraz zapsat formálně takto

$${}_{R_1}\tilde{\mathbf{F}}_{F,M} = \tilde{\mathbf{T}}_{R_3 R_1} {}_{R_3}\tilde{\mathbf{F}}_{F,M}, \quad (73)$$

kde $\tilde{\mathbf{F}}_{F,M}$ je hypermatice složená ze sloupcových matic \mathbf{F} a \mathbf{M} a $\tilde{\mathbf{T}}_{R_3 R_1}$ je hypermatice, která se skládá ze submatic $\mathbf{S}_{R_3 R_2}$ a $\mathbf{R}_{R_2 R_1}$. Rovnice (72), případně (73), vyjadřuje transformaci

obecné prostorové soustavy sil z prostoru R_3 do základního prostoru R_1 . Matice $\tilde{\mathbf{F}}_{F,M}$ je sloupcová matice silových účinků. Transformační matice $\tilde{\mathbf{T}}_{R_3 R_1}$ není ortogonální a k ní inverzní matice je

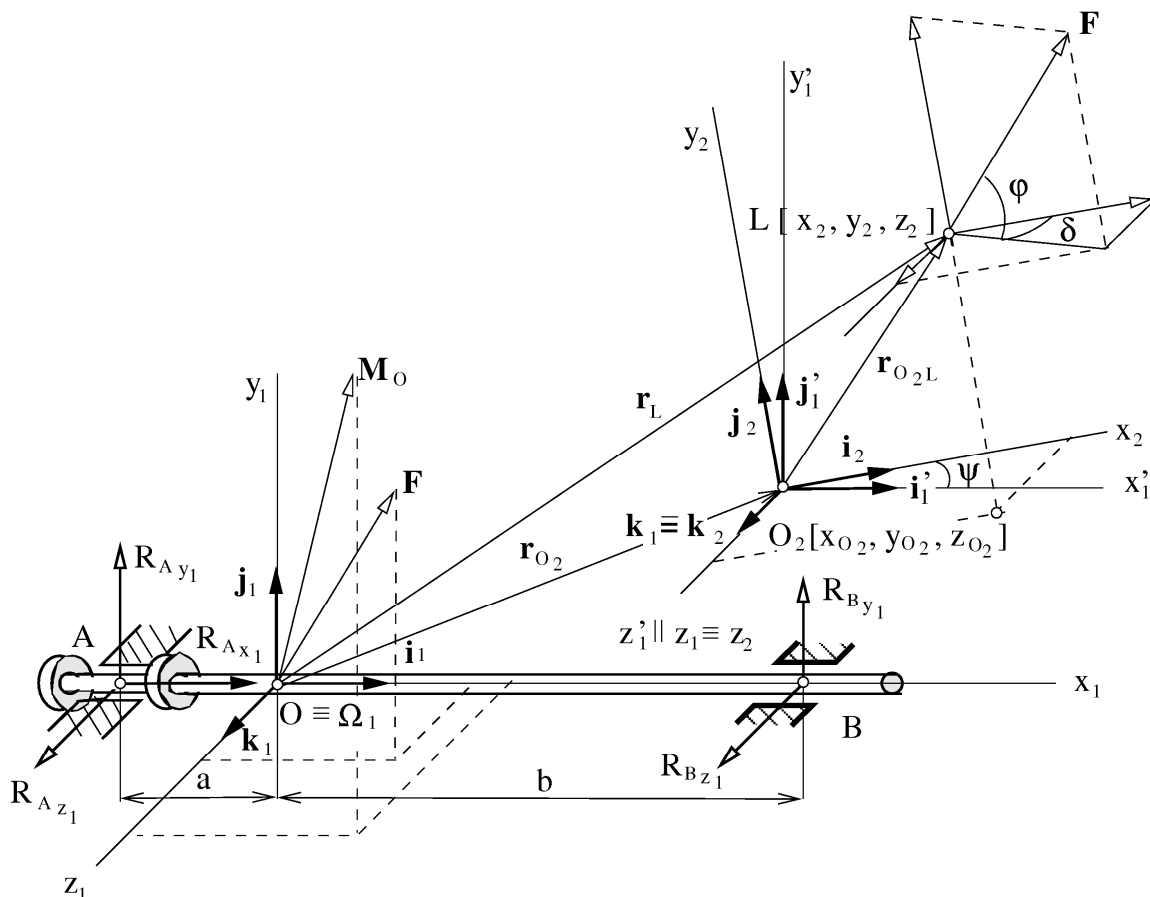
$$\tilde{\mathbf{T}}_{R_1 R_3} = \tilde{\mathbf{T}}_{R_3 R_1}^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} \mathbf{S}_{R_3 R_2}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{R_3 R_2}^T \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{R_2 R_2}^T & \mathbf{I} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \mathbf{S}_{R_3 R_2}^T \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{R_3 R_2}^T \mathbf{R}_{R_2 R_1}^T & \mathbf{S}_{R_3 R_2}^T \mathbf{I} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} \mathbf{S}_{R_3 R_2}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_{R_3 R_2}^T \mathbf{R}_{R_2 R_1}^T & \mathbf{S}_{R_3 R_2}^T \end{array} \right\|. \quad (74)$$

Uvedený obecný postup bude zřejmý z následujících příkladů.

Příklad 3

Určete reakce v místech uložení hřídele vyvolané silou F definovanou v prostoru R_2 , jestliže jsou dány následující silové a geometrické veličiny: $F, \varphi, \delta, x_2, y_2, z_2, x_{O_2}, y_{O_2}, z_{O_2}, a, b, \psi$

Situace je znázorněna na obr. 58, ze kterého je zřejmé, že síla F je určena svými složkami v souřadnicovém systému $R_2 \equiv (\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2)$. Řešení provedeme ve dvou krocích. Nejdříve nahradíme sílu F v bodě $O \equiv \Omega_1$ a následně napíšeme podmínky rovnováhy v prostoru $R_1 \equiv (\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$. Pro snadnější řešení zavedeme pomocný prostor $R'_1 \equiv (\mathbf{i}'_1, \mathbf{j}'_1, \mathbf{k}'_1)$, který je paralelní s prostorem R_1 . Náhradu síly F v bodě O , spočívající v paralelním posunutím \mathbf{F} , zapíšeme symbolickou vektorovou rovnicí



Obr. 58 Zatížení hřídele silou F

$${}_{R_1} \mathbf{F} = \mathbf{S}_{R_2 R_1} {}_{R_2} \mathbf{F} , \quad (75)$$

kde síla ${}_{R_2} \mathbf{F}$ a transformační matice $\mathbf{S}_{R_2 R_1}$ jsou dány výrazy

$${}_{R_2} \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_{x_2} \\ F_{y_2} \\ F_{z_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \cos \varphi \cos \delta \\ F \sin \varphi \\ F \cos \varphi \sin \delta \end{Bmatrix} , \quad \mathbf{S}_{R_2 R_1} = \begin{Bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} . \quad (76)$$

Nezapomeňme, že prostory R_1 a R'_1 jsou paralelně posunuty a proto platí $\mathbf{S}_{R_2 R_1} \equiv \mathbf{S}_{R_2 R'_1}$. Po dosazení do rov. (75) dostaneme

$${}_{R_1} \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ F_{z_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \cos \varphi \cos \delta \cos \psi - F \sin \varphi \sin \psi \\ F \cos \varphi \cos \delta \sin \psi + F \sin \varphi \cos \psi \\ F \cos \varphi \sin \delta \end{Bmatrix} . \quad (77)$$

Pro určení momentu M_O potřebujeme znát polohové vektory počátků souřadnicových systémů, pro které platí

$${}_{R_1} \mathbf{r}_{O_2} = \|x_{O_2}, y_{O_2}, 0\|^T , \quad {}_{R_2} \mathbf{r}_{O_2L} = \|x_2, y_2, z_2\|^T . \quad (78)$$

Aplikací rov. (68) můžeme vyjádřit moment vzniklý posunutím síly F do bodu O

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_L \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_{O_2} + \mathbf{r}_{O_2L}) \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_{O_2} \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_{O_2L} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 . \quad (79)$$

Všimněte si, že v rov. (79) nejsou u vektorů uvedeny prostory, neboť rovnice je platná obecně bez ohledu na vyjádření vektorů, které ale musíme respektovat při konkrétním výpočtu ve zvoleném prostoru. Náš finální výpočet, kterým je určení statické rovnováhy provádíme v prostoru R_1 a proto do tohoto prostoru přetransformujeme rov. (79). Vyjádříme proto jednotlivé výrazy na pravé straně rovnice v příslušných souřadnicových systémech. Pro druhý člen na pravé straně můžeme psát

$$\begin{aligned} {}_{R_2} \mathbf{M}_2 = {}_{R_2} \mathbf{r}_{O_2L} \times {}_{R_2} \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ F_{x_2} & F_{y_2} & F_{z_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 F_{z_2} - z_2 F_{y_2} \\ -x_2 F_{z_2} + z_2 F_{x_2} \\ x_2 F_{y_2} - y_2 F_{x_2} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} y_2 F \cos \varphi \sin \delta - z_2 F \sin \varphi \\ -x_2 F \cos \varphi \sin \delta + z_2 F \cos \varphi \cos \delta \\ x_2 F \sin \varphi - y_2 F \cos \varphi \cos \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_{2x_2} \\ M_{2y_2} \\ M_{2z_2} \end{vmatrix} . \end{aligned} \quad (80)$$

a po transformaci do prostoru R_1 , s využitím pomocného prostoru R'_1 , dostaneme

$${}_{R_1} \mathbf{M}_2 = \mathbf{S}_{R_2 R_1} {}_{R_2} \mathbf{M}_2 = \begin{vmatrix} M_{2x_2} \cos \psi - M_{2y_2} \sin \psi \\ M_{2x_2} \sin \psi + M_{2y_2} \cos \psi \\ M_{2z_2} \end{vmatrix} . \quad (81)$$

Nyní vyjádříme první člen na pravé straně rov. (79)

$${}_{R_1}\mathbf{M}_1 = {}_{R_1}\mathbf{r}_{O_2} \times {}_{R_1}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_1 \\ x_{O_2} & y_{O_2} & z_{O_2} \\ F_{x_1} & F_{y_1} & F_{z_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{O_2} F_{z_1} - z_{O_2} F_{y_1} \\ -x_{O_2} F_{z_1} + x_{O_2} F_{x_1} \\ x_{O_2} F_{y_1} - y_{O_2} F_{x_1} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & -z_{O_2} & y_{O_2} \\ 0 & 0 & x_{O_2} \\ -y_{O_2} & x_{O_2} & 0 \end{vmatrix}}_{\mathbf{R}_{R_2 R_1}} \begin{vmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ F_{z_1} \end{vmatrix}. \quad (82)$$

Po dosazení do rovnice (79) dostaneme

$${}_{R_1}\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} y_{O_2} F_{z_1} - z_{O_2} F_{y_1} + (y_2 F_{z_2} - z_2 F_{y_2}) \cos \psi - (-x_2 F_{z_2} + z_2 F_{x_2}) \sin \psi \\ -x_{O_2} F_{z_1} + z_{O_2} F_{x_1} + (y_2 F_{z_2} - z_2 F_{y_2}) \sin \psi + (-x_2 F_{z_2} + z_2 F_{x_2}) \cos \psi \\ x_{O_2} F_{y_1} - y_{O_2} F_{x_1} + x_2 F_{y_2} - y_2 F_{x_2} \end{vmatrix}. \quad (83)$$

Uvedený postup ověříme na jednoduchém ilustračním případě, kdy nejprve pro dané hodnoty určíme moment v bodě O , vzniklý posunutím síly F_{y_2} přímo a potom použitím rov. (83).

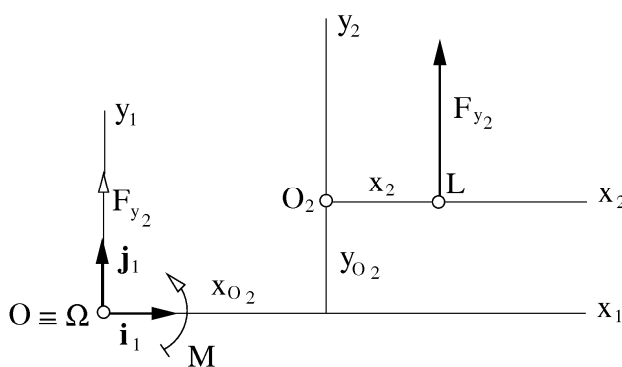
Pro číselné hodnoty $x_{O_2} = 4m$, $y_{O_2} = 2m$,

$z_{O_2} = 0$, $x_2 = 2m$, $y_2 = 0$, $z_2 = 0$, $\psi = 0$,

$\delta = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $F_{x_2} = 0$, $F_{y_2} = 4N$, $F_{z_2} = 0$,

můžeme, obr. 59, je moment síly F_{y_2}

k bodu O dán vztahem



Obr. 59 Ilustrační případ pro ověření

$${}_{R_1}M_O = (x_{O_2} + x_2)F_{y_2} = (4 + 2)4 = 24 Nm. \quad (84)$$

Použitím rov. (77) a (83) dostaneme po dosazení

$${}_{R_1}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} 0 \\ F_{y_2} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad {}_{R_1}\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} 0 + (0 - 0) - (0 + 0) \cdot 0 \\ 0 \\ 4 \cdot 4 - 0 + 2 \cdot 4 - 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{vmatrix}. \quad (85)$$

Vidíme, že oba postupy dají stejné výsledky. Uvedené ověření je ovšem možné provést pouze pro velmi jednoduchý ilustrační případ.

Tímto jsme splnili první krok a nyní zbývá sestavit podmínky statické rovnováhy. Jedná se, podobně jako v příkladu 1, o prostorovou soustavu sil, pro kterou píšeme šest podmínek rovnováhy, které symbolicky zapíšeme takto

$${}_{R_1}\mathbf{F} = {}_{R_1}\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad {}_{R_1}\mathbf{M}_O + {}_{R_1}\mathbf{M}_R = \mathbf{0}, \quad (86)$$

kde ${}_{R_1}\mathbf{R} = \left\| {}_{R_1}\mathbf{R}_A, {}_{R_1}\mathbf{R}_B \right\|^T$ a ${}_{R_1}\mathbf{M}_R = \left\| {}_{R_1}\mathbf{M}_{R_A}, {}_{R_1}\mathbf{M}_{R_B} \right\|^T$ jsou matice reakčních silových účinků.

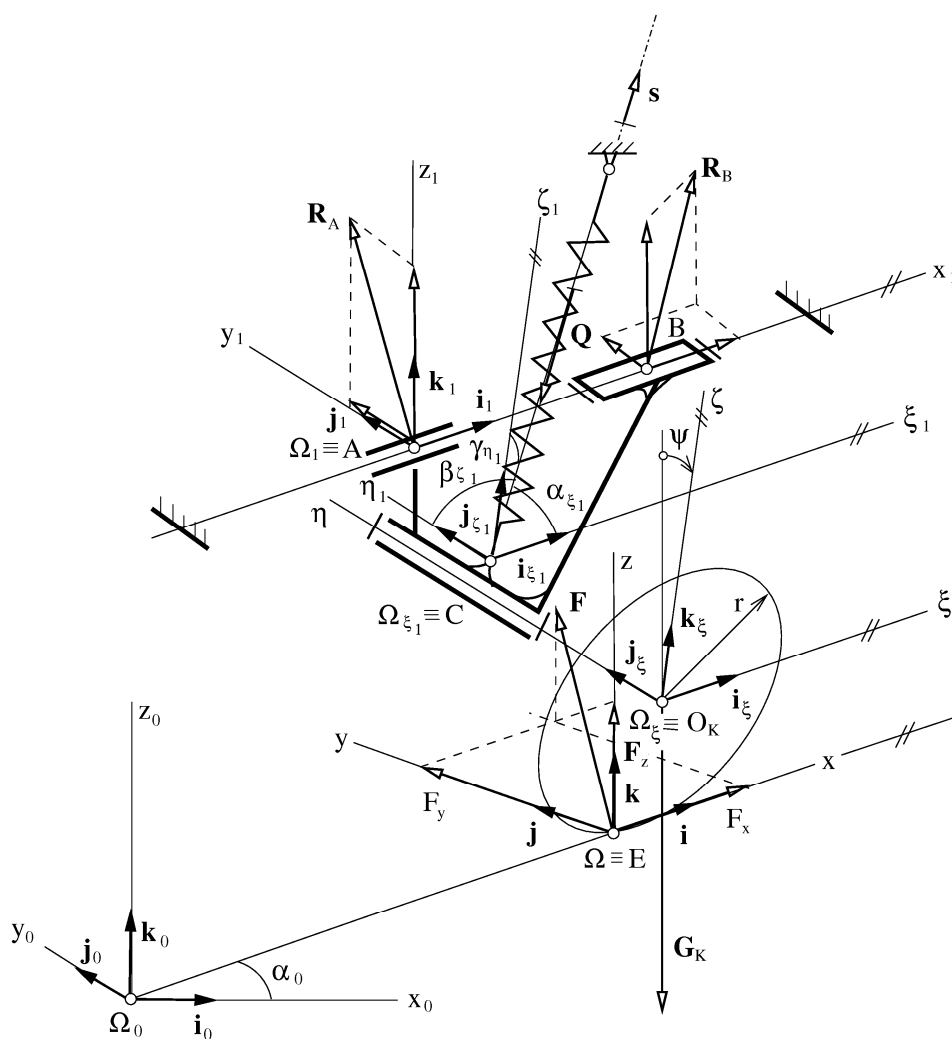
Je zřejmé, že moment pro rovnováhu bude mít pouze složku v ose x_1 . Rozepsání vektorové rovnice (86) do skalárních rovnic již provádět nebudeme.

Příklad 4

Určete reakce v místech uložení prostorového mechanismu zavěšení automobilového kola, jestliže jsou dány následující silové a geometrické veličiny: ${}_{R_0}\mathbf{F} = \left\| {}_{R_0}F_x, {}_{R_0}F_y, {}_{R_0}F_z \right\|^T$, ${}_{R_1}\mathbf{G}_k$, ${}_{R_0}O_k \left[{}_{R_0}x_{O_k}, {}_{R_0}y_{O_k}, {}_{R_0}z_{O_k} \right]^T$, ${}_{R_1}\mathbf{C} \left[{}_{R_1}x_c, {}_{R_1}y_c, {}_{R_1}z_c \right]^T$, $\mathbf{s} = \left\| \cos \alpha_{\xi_1}, \cos \beta_{\eta_1}, \cos \gamma_{\zeta_1} \right\|^T$, ${}_{R_1}B \Big|_{{}_{R_1}x_B, 0, 0}, \alpha_0, \psi$.

Z obr. 57, na kterém je mechanismus zavěšení znázorněn, je patrné, že reakčními účinky budou síly v místech A , B , C , které představují vnější reakce. Abychom se vyhnuli zdoluhavému počítání, spokojíme se s naznačením postupu výpočtu. Hledáme reakce R_A, R_B a sílu v pružině Q a proto řešení provedeme v prostoru $R_1 \equiv (\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$. Pomocné prostory $R_\xi \equiv (\mathbf{i}_\xi, \mathbf{j}_\xi, \mathbf{k}_\xi)$ a $R_{\xi_1} \equiv (\mathbf{i}_{\xi_1}, \mathbf{j}_{\xi_1}, \mathbf{k}_{\xi_1})$ jsou paralelní, prostor R_ξ je vzhledem k prostoru $R_x \equiv (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ natočen o úhel ψ kolem osy ξ . Rovnováhu sil působících na lichoběžníkový závěs můžeme vyjádřit, viz rov. (72), rovnicí

$$\begin{bmatrix} R_1 & \mathbf{R}_A \\ & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & \mathbf{R}_B \\ & \mathbf{M}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{R_{\xi_1} R_1}, & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{R_{\xi_1} R_1} \mathbf{S}_{R_{\xi_1} R_1}, & \mathbf{S}_{R_{\xi_1} R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{\xi_1} \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{R_x R_1}, & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{R_x R_1} \mathbf{S}_{R_x R_1}, & \mathbf{S}_{R_x R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_x \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (87)$$



Obr. 60 Mechanismus zavěšení kola

kde $\mathbf{S}_{R_{\xi_1} R_1}$ je matice směrových kosinů mezi prostory $R_{\xi_1} \equiv (\mathbf{i}_{\xi_1}, \mathbf{j}_{\xi_1}, \mathbf{k}_{\xi_1})$ a $R_1 \equiv (\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$, $\mathbf{S}_{R_x R_1}$ je matice směrových kosinů mezi prostory $R_x \equiv (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ a R_1 . $R_{R_{\xi_1} R_1}$ je transformační matice vyjadřující paralelní posunutí síly z prostoru R_{ξ_1} do R_1 . Podobně matice $R_{R_x R_1}$ vyjadřuje posunutí síly z prostoru R_x do R_1 . Maticovou rovnici (87) můžeme zapsat stručněji pomocí hypermatic

$${}_{R_1} \tilde{\mathbf{F}}_{R_A} + {}_{R_1} \tilde{\mathbf{F}}_{R_B, M_B} + \tilde{\mathbf{T}}_{R_{\xi_1} R_1} {}_{R_{\xi_1}} \tilde{\mathbf{F}}_Q + \tilde{\mathbf{T}}_{R_x R_1} {}_{R_x} \tilde{\mathbf{F}}_F = \mathbf{0}, \quad (88)$$

kde ${}_{R_1} \tilde{\mathbf{F}}_{R_A, 0} = [{}_{R_1} \mathbf{R}_{A/R_1}, \mathbf{0}]^T$, ${}_{R_1} \tilde{\mathbf{F}}_{R_B, M_B} = [{}_{R_1} \mathbf{R}_{A/R_1}, \mathbf{M}_B]^T$, ${}_{R_{\xi_1}} \tilde{\mathbf{F}}_0 = [{}_{R_{\xi_1}} Q, \mathbf{0}]^T$ jsou matice silových účinků a $\tilde{\mathbf{T}}_{R_{\xi_1} R_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{R_{\xi_1} R_1} & \mathbf{0} \\ {}_{R_{\xi_1} R_1} \mathbf{R}_{R_{\xi_1} R_1} \mathbf{S}_{R_{\xi_1} R_1} & \mathbf{S}_{R_{\xi_1} R_1} \end{bmatrix}$, $\tilde{\mathbf{T}}_{R_x R_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{R_x R_1} & \mathbf{0} \\ {}_{R_x R_1} \mathbf{R}_{R_x R_1} \mathbf{S}_{R_x R_1} & \mathbf{S}_{R_x R_1} \end{bmatrix}$ jsou transformační matice. Rozepsáním rov. (87), nebo rov. (88) dostaneme šest rovnic pro šest neznámých $R_{Ay_1}, R_{Az_1}, R_{Bx_1}, R_{By_1}, R_{Bz_1}, Q$.